

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} a + b + c &= S_1, & a^2 + b^2 + c^2 &= S_2, & a^3 + b^3 + c^3 &= S_3, & a^4 + b^4 + c^4 &= S_4, \\ d + e + f &= T_1, & d^2 + e^2 + f^2 &= T_2, & d^3 + e^3 + f^3 &= T_3, & d^4 + e^4 + f^4 &= T_4, \end{aligned}$$

a feltevések így írhatók:

$$(3) \quad T_1 - S_1 = 0,$$

$$(4) \quad T_2 - S_2 = 0,$$

$$(5) \quad T_3 - S_3 \neq 0.$$

Vizsgáljuk a (2) bal és jobb oldalán álló K_1, K_2 kifejezések különbségét rendre $m = 1, 2, 3, 4$ esetén. $m = 1$ -re (2) nyilvánvalóan azonosság. $m = 2$ -re

$$K_1 - K_2 = (S_2 + T_2 + 3k^2) + 2T_1k - (T_2 + S_2 + 3k^2) - 2S_1k = 2(T_1 - S_1)k = 0,$$

mert k együtthatója (3) szerint 0. $m = 3$ -ra

$$\begin{aligned} K_1 - K_2 &= (S_3 + T_3 + 3k^3) + 3T_2k + 3T_1k^2 - (T_3 + S_3 + 3k^3) - 3S_2k - 3S_1k^2 = \\ &= 3(T_2 - S_2)k + 3(T_1 - S_1)k^2 = 0, \end{aligned}$$

mert k és k^2 együtthatója (4) és (3) szerint 0. Végül $m = 4$ -re az $(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ azonosság felhasználásával

$$\begin{aligned} K_1 - K_2 &= (S_4 + T_4 + 3k^4) + 4T_3k + 6T_2k^2 + 4T_1k^3 - (T_4 + S_4 + 3k^4) - \\ &\quad - 4S_3k - 6S_2k^2 - 4S_1k^3 = 4(T_3 - S_3)k + 6(T_2 - S_2)k^2 + \\ &\quad + 4(T_1 - S_1)k^3 = 4(T_3 - S_3)k, \end{aligned}$$

mert k^2 és k^3 együtthatója 0. Minthogy pedig k együtthatója (5) szerint 0-tól különböző, azért $K_1 - K_2 \neq 0$, vagyis a (2) összefüggés $m = 4$ -re nem áll fenn bármely k -val (hanem csupán $k = 0$ -val). Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szabó Anna (Szeged, Tömörkény I. lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Több dolgozat szerint az állítás „bármely k -val” szavai így helyesbítendők: „bármely $k \neq 0$ -val”. Valóban láttuk, hogy *van olyan* k , amellyel (2) fennáll $m = 4$ mellett is, éspedig $k = 0$ az egyetlen ilyen érték. Ez az eset azonban nem változtatja meg azt a tényt, hogy $m = 4$ mellett (2) nem áll fenn *bármely* k -val, – tehát az eredeti fogalmazás nem helytelen. Ez persze nem jelenti azt, hogy az észrevétel volna helytelen. Az állítás az említett módosítással is helyes. Ezt a meglepő tényt az magyarázza, hogy az állítás és a módosítás hasonlóságuk ellenére nem egészen ugyanarról beszélnek. – Akkor is érvényes volna az eredeti állítás, ha ezer kivételes k -érték volna, vagy ha pl. $m = 4$ mellett *minden egész* számra fennállna (2) – már pedig *végtelen sok* egész szám van, – ugyanis ez még *nem bármely* szám, hiszen vannak nem egész számok is. – Akkor lenne szükség a fenti helyesbítésre, ha az állítás így szólna: a (2) állítás $m = 4$ mellett bármely k -val érvénytelen.

2. 24 dolgozat általánosítani vélte az állítást a következőképpen: „ha (1) fennáll $n = 1, 2, \dots, p$ -vel, de nem áll fenn $n = p + 1$ -gyel, akkor (2) fennáll bármely k -val $m = 1, 2, \dots, p + 1$ mellett, de nem áll fenn $m = p + 2$ mellett.” Ez az állítás azonban semmitmondó, mert – amint arra *Kéry Gerzson* (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.) rámutat – bebizonyítható, hogy ha (1) fennáll $n = 1, 2, 3$ -mal, akkor az a, b, c számok valamilyen sorrendben azonosak a d, e, f számokkal, ezért (1) valamennyi $n > 3$ természetes számra is fennáll. Így a feltétel nem teljesülhet. Abban az esetben azonban elfogadható általánosítást adhatunk, ha m és n értékeinek számával együtt növeljük a két egyenlőség tagjainak számát is. A következő általánosítás tehát már helyes: Ha p természetes szám, és az

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_{p+1}^n = b_1^n + b_2^n + \dots + b_{p+1}^n$$

egyenlőség fennáll $n = 1, 2, \dots, p$ -vel, de nem áll fenn $n = p + 1$ -gyel, akkor az

$$\begin{aligned} a_1^m + a_2^m + \dots + a_{p+1}^m + (b_1 + k)^m + (b_2 + k)^m + \dots + (b_{p+1} + k)^m = \\ = b_1^m + b_2^m + \dots + b_{p+1}^m + (a_1 + k)^m + (a_2 + k)^m + \dots + (a_{p+1} + k)^m \end{aligned}$$

egyenlőség $m = 1, 2, \dots, p + 1$ -re fennáll bármely k -val, de $m = p + 2$ -re már nem. Bizonyítása ugyanúgy történik, mint a $p = 2$ speciális esetben. – *Kéry Gerzson* az általánosítást a binomiális tétel felhasználásával be is bizonyította. – Helyesen mondta ki az általánosítást *Ratkó István* is (Budapest, Arany J. g. IV. o. t.), de nem indokolta meg a tagok száma emelésének szükségességét.

További 6 dolgozat tett lépést a fenti irányban: (1) két oldali tagjainak számát 3, ill. $p + 1$ helyett j -nek véve, de a j és p közti kapcsolatot nem tisztázta. Ezek az előbbi 24-nél erősebb általánosítást kívántak adni, de az $j < p + 1$ -re nem igaz.