

I. megoldás. A sorozatpár meghatározó képletpárját $y_k = (x_{k+1} - 3x_k)/2$, $x_k = (y_{k+1} - 3y_k)/4$ alakban írva látjuk, hogy mindegyik sorozat minden tagja felírható a másik sorozat két tagjából: az 1-gyel nagyobb indexű tagból kivonjuk az ugyanazon indexű tag 3-szorosát és a különbségnek y esetében a felét, x esetében negyedét vesszük. Ezt kétszer alkalmazva minden tag kifejezhető kizárólag az öt tartalmazó sorozatból: a 2-vel és 1-gyel nagyobb indexű taggal és önmagával:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{4}(y_{k+1} - 3y_k) = \frac{1}{4} \left(\frac{x_{k+2} - 3x_{k+1}}{2} - \frac{3x_{k+1} - 9x_k}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{8}(x_{k+2} - 6x_{k+1} + 9x_k), \end{aligned}$$

és innen $x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k$ illetőleg $k+2$ helyett k -t (más szóval k helyett $k-2$ -t) írva $x_k = 6x_{k-1} - x_{k-2}$. – Hasonlóan

$$y_k = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{k+2} - 3y_{k+1}}{4} - \frac{3y_{k+1} - 9y_k}{4} \right) \text{ -ből } y_k = 6y_{k-1} - y_{k-2}.$$

A két eredmény együtthatóinak megegyezése alapján mondhatjuk: mindkét sorozat bármelyik tagja egyenlő a vele szomszédos tagok összegének 6-odrésszével: $z_k = (z_{k-1} + z_{k+1})/6$, ahol mindhárom z betű helyére vagy x , vagy y írandó. – Ezek alapján a további kívánt összefüggéseket hasonlóan összevontan írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \underline{z_k} &= 6z_{k-1} - z_{k-2} = 6(6z_{k-2} - z_{k-3}) - (6z_{k-3} - z_{k-4}) = 36z_{k-2} + z_{k-4} - 2 \cdot 6z_{k-3} = \\ &= 36z_{k-2} + z_{k-4} - 2(z_{k-4} + z_{k-2}) = \underline{34z_{k-2} - z_{k-4}}, \end{aligned}$$

másképpen $z_{k-2} = (z_k + z_{k-4})/34$. Végül

$$\begin{aligned} \underline{z_k} &= 6z_{k-1} - z_{k-2} = 6(34z_{k-3} - z_{k-5}) - (6z_{k-3} - z_{k-4}) = \\ &= 198z_{k-3} + (z_{k-4} - 6z_{k-5}) = 198z_{k-3} - z_{k-6}. \end{aligned}$$

E kifejezések 0 és negatív egész k -val is érvényesek, hiszen az 1061. feladat megjegyzésében láttuk, hogy az összefüggések minden egész k -ra érvényesek. Kifejezéseink természetesen az 1061. feladat (2) összefüggéseiből is levezethetők.

II. megoldás Az 1061. feladat (5) összefüggései szerint

$$x_{k+r} = x_r y_k + y_r x_k \quad y_{k+r} = y_r y_k + 2x_r x_k.$$

Írjuk fel ezt r helyén $-r$ -rel és vegyük tekintetbe $x_{-r} = -x_r$, $y_{-r} = y_r$ -et:

$$x_{k-r} = -x_r y_k + y_r x_k \quad y_{k-r} = y_r y_k - 2x_r x_k.$$

Ezekből összeadással és rendezéssel

$$x_{k+r} = 2y_r x_k - x_{k-r}, \quad y_{k+r} = 2y_r y_k - y_{k-r}$$

végül k helyére $k-r$ -et írva

$$x_k = 2y_r x_{k-r} - x_{k-2r}, \quad y_k = 2y_r y_{k-r} - y_{k-2r}.$$

Ha már most rendre $r = 1, 2, 3$, akkor $y_r = 3, 17, 99$, és így

$$\begin{aligned} x_k &= 6x_{k-1} - x_{k-2}, & y_k &= 6y_{k-1} - y_{k-2}; \\ x_k &= 34x_{k-2} - x_{k-4}, & y_k &= 34y_{k-2} - y_{k-4}; \\ x_k &= 198x_{k-3} - x_{k-6}, & y_k &= 198y_{k-3} - y_{k-6}. \end{aligned}$$

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. IV. o. t.)

III. megoldás (vázlat). Feltesszük, hogy van olyan α, β együttható, hogy minden egész k -ra $x_k = \alpha x_{k-1} + \beta x_{k-2}$. Eszerint α, β csak a $k = 3$ és $k = 4$ -gyel adódó

$$12\alpha + 2\beta = 70, \quad 70\alpha + 12\beta = 408$$

egyenletrendszer megoldása lehet, vagyis $\alpha = 6$, $\beta = -1$. Az így nyert $x_k = 6x_{k-1} - x_{k-2}$ összefüggés minden egész indexre érvényes, mert az 1061. feladat (2) képletét k helyén $k-2$ -vel, továbbá (1) képletét k helyén $k-1$ -gyel alkalmazva minden k -ra:

$$6x_{k-1} - x_{k-2} = 6x_{k-1} - (3x_{k-1} - 2y_{k-1}) = 3x_{k-1} + 2y_{k-1} = x_k.$$

Hasonlóan pl. az $y_k = \gamma y_{k-2} + \delta y_{k-4}$ feltevésből $k = 2$ és $k = 3$ -mal $\gamma + 17\delta = 17$, $3\gamma + 3\delta = 99$, és így $\gamma = 34$, $\delta = -1$, és az adódó $34y_{k-2} - y_{k-4}$ kifejezés minden k -ra y_k -t adja, mert az 1061. feladat (5) képletét k helyén $k-2$ -vel és előbb $r = -2$ -vel, majd $r = 2$ -vel alkalmazva, valamint $y_{-2} = y_2$ és $x_{-2} = -x_2$ -re tekintettel

$$34y_{k-2} - y_{k-4} = 2y_2 y_{k-2} - (y_{-2} y_{k-2} + 2x_{-2} x_{k-2}) = y_2 y_{k-2} + 2x_2 x_{k-2} = y_k.$$