

I. Az eredeti értelmezés képlet-párja egyenletrendszernek tekinthető x_k , y_k -nak x_{k+1} és y_{k+1} -ből való meghatározására. $k = 1, 2, 3, \dots$ esetére

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} 3x_k + 2y_k &= x_{k+1} \\ 4x_k + 3y_k &= y_{k+1} \end{aligned} \right\} \text{-ből}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_k = 3x_{k+1} - 2y_{k+1} \\ y_k = -4x_{k+1} + 3y_{k+1}. \end{cases}$$

Miután ezt az új képlet-párt tekintjük a sorozat értelmezésének $k = 0, -1, -2, \dots$ -re, azért (2) minden egész k -ra érvényes.

Számítsuk ki (2) alapján $x_1 = 2$ és $y_1 = 3$ -ból a 0 és -1 indexű tagokat: $x_0 = 3x_1 - 2y_1 = 0$, $y_0 = -4x_1 + 3y_1 = 1$, ezekből pedig $x_{-1} = 3x_0 - 2y_0 = -2 = -x_1$, és $y_{-1} = -4x_0 + 3y_0 = 3 = y_1$. Eszerint az állítás $k = 1$ -re igaz.

Írjunk (2)-ben $k + 1$ helyett $-j$ -t, ekkor k helyére $-j - 1 = -(j + 1)$ lép és nyerjük

$$(3) \quad x_{-(j+1)} = 3x_{-j} - 2y_{-j}, \quad y_{-(j+1)} = -4x_{-j} + 3y_{-j}.$$

Ha már most $-j$ olyan (negatív) index, amelyre az állítás igaz, vagyis $x_{-j} = -x_j$ és $y_{-j} = y_j$, akkor ezekkel (3) és (1) alapján a $-(j + 1)$ index is ilyen, mert

$$\begin{aligned} x_{-(j+1)} &= -3x_j - 2y_j = -(3x_j + 2y_j) = -x_{j+1}. \\ y_{-(j+1)} &= 4x_j + 3y_j = y_{j+1}, \end{aligned}$$

vagyis az állítás érvényessége öröklődik $-(j + 1)$ -re tehát minden egész indexre érvényes.

II. (2)-ből, $3 = y_{-1}$ és $2 = -x_{-1}$ figyelembevételével és k helyére $k - 1$ -et írva bármely egész k mellett

$$(4) \quad x_{k-1} = x_{-1}y_k + y_{-1}x_k, \quad y_{k-1} = y_{-1}y_k + 2x_{-1}x_k,$$

eszerint a vizsgálandó

$$(5) \quad x_{k+r} = x_r y_k + y_r x_k, \quad y_{k+r} = y_r y_k + 2x_r x_k$$

összefüggés $r = -1$ -gyel helyes. Ugyancsak helyes $r = 0$ -val is, tekintettel arra, hogy $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. – Megmutatjuk r szerinti teljes indukcióval, hogy (5) minden egész r -re érvényes. Feltesszük evégett, hogy valamely $r = s$ értékre (5) helyes, vagyis

$$(6) \quad x_{k+s} = x_s y_k + y_s x_k, \quad y_{k+s} = y_s y_k + 2x_s x_k,$$

és megmutatjuk, hogy helyes r helyén $s - 1$ -gyel is. Valóban, (4)-et k helyén $k + s$ -sel alkalmazva, majd (6)-ra tekintettel, végül átrendezés után ismét (4) alapján, ezúttal k -helyén s -sel, x_{k+s-1} és y_{k+s-1} egymás után így alakul:

$$\begin{aligned} x_{k+(s-1)} &= x_{(k+s)-1} = x_{-1}y_{k+s} + y_{-1}x_{k+s} = x_{-1}(y_s y_k + 2x_s x_k) + y_{-1}(x_s y_k + y_s x_k) = \\ &= (x_{-1}y_s + y_{-1}x_s)y_k + (y_{-1}y_s + 2x_{-1}x_s)x_k = x_{s-1}y_k + y_{s-1}x_k, \\ y_{k+(s-1)} &= y_{(k+s)-1} = y_{-1}y_{k+s} + 2x_{-1}x_{k+s} = y_{-1}(y_s y_k + 2x_s x_k) + 2x_{-1}(x_s y_k + y_s x_k) = \\ &= (y_{-1}y_s + 2x_{-1}x_s)y_k + 2(x_{-1}y_s + y_{-1}x_s)x_k = \\ &= y_{s-1}y_k + 2x_{s-1}x_k. \end{aligned}$$

Ezek szerint (5) bármely egész k -val és bármely egész r -rel érvényes.

Kovács Imre (Békés, Szegedi Kis I. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A II. részbeli bizonyítás helyett elég lett volna arra rámutatni, hogy a (2) képletpár egyenértékű (1)-gyel; ennél fogva – bár a sorozatpár visszafelé való folytatását (2)-vel értelmeztük, – a folytatásokban (1) is érvényes. (Pl. $x_{-3} = -70$ és $y_{-3} = 99$ -ből (1) alapján $x_{-2} = -210 + 198 = -12$ és $y_{-2} = -280 + 297 = 17$.) Eszerint (1) is minden egész indexre érvényes; és ez áll minden belőle levezetett összefüggésre, – így (5)-re is.