

I. megoldás. (1) és (2) az $u = x^2 + y^2$ és $v = xy$ új ismeretlenekre nézve elsőfokú egyenletrendszer:

$$3u - v = 16, \quad 7u - 4v = 38.$$

Innen $u = 5,2$, $v = -0,4$. – Ezekből kiszámíthatjuk $w = x + y$ értékét: $u + 2v = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = w^2 = 4,4$, tehát $w = \pm\sqrt{4,4}$. – Most már x és y értékét a

$$z^2 - wz + v = 0$$

egyenlet gyökei adják:

$$z = \frac{1}{2}(w \pm \sqrt{w^2 - 4v}) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{4,4} \pm \sqrt{6}) = \pm\sqrt{1,1} \pm \sqrt{1,5},$$

ahol a két négyzetgyök előtt $\pm$ előjel-pár egymástól független. Az előjelek minden párosításával 4 megoldást kapunk:

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{1,1} + \sqrt{1,5}, & x_2 &= +\sqrt{1,1} - \sqrt{1,5}, \\ x_3 &= -\sqrt{1,1} + \sqrt{1,5}, & x_4 &= -\sqrt{1,1} - \sqrt{1,5} \end{aligned}$$

és így $y = w - x$ alapján – itt már azonban w -nek az x -ben használt előjelével! –

$$y_1 = +\sqrt{1,1} - \sqrt{1,5} = x_2, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_4, \quad y_4 = x_3.$$

Négy értékes jegyre a négyzetgyöktáblázat alapján $\sqrt{1,1} \approx 1,049$ és $\sqrt{1,5} \approx 1,225$, ezért legfeljebb 0,001 hibával

$$\begin{aligned} x_1 &= y_2 \approx 2,274, & y_1 &= x_2 \approx -0,176 \\ x_3 &= y_4 \approx 0,176, & y_3 &= x_4 \approx -2,274. \end{aligned}$$

Kiss Sándor (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldás alapján kereshetjük mindjárt azt a λ , μ számpárt, amellyel (1) λ -szorozásának és (2) μ -szörösének összege egyenlő $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$ -nel, más szóval: amellyel az összegben $x^2 + y^2$ együttthatója 1, és xy együttthatója 2, vagyis

$$3\lambda + 7\mu = 1 \quad -\lambda - 4\mu = 2.$$

Innen $\lambda = 3,6$, $\mu = -1,4$. Ekkor $(x + y)^2 = 16\lambda + 38\mu = 4,4$, tehát ismét $x + y = \pm 2\sqrt{1,1}$. – Hasonlóan kapunk egyenletet $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ -ra, és ebből $x - y$ -ra, azzal a ν , ξ számpárral, melyre

$$3\nu + 7\xi = 1 \quad -\nu - 4\xi = -2.$$

Innen $\nu = -2$, $\xi = 1$, ekkor $(x - y)^2 = 16\nu + 38\xi = 6$, tehát $x - y = \pm\sqrt{6} = \pm 2\sqrt{1,5}$.

Most már x és y -ra a $2 \cdot 2$ előjelváltozatnak megfelelően írhatunk fel 4 elsőfokú egyenletrendszert, pl. $x + y = +2\sqrt{1,1}$, $x - y = +2\sqrt{1,5}$ -ből a fenti x_1 , y_1 megoldás adódik.

Kucza János (Jászberény, Lehel Vezér g. III. o. t.)

III. megoldás. Grafikus megoldás céljára megvizsgáljuk, hogy milyen görbe lesz az (1) és (2) képe.

Mindkét egyenletben x és y -t felcserélve ismét az eredeti egyenlethez jutunk. Eszerint ha egy $P(x_0, y_0)$ pont rajta van a görbén, akkor $P'(y_0, x_0)$ is rajta van, vagyis a görbe a koordinátatengelyek I. és III. negyedbeli f_1 szögfelezőjére tengelyesen tükrös. Hasonlóan a tengelyek II. és IV. negyedbeli f_2 szögfelezője is tükrös tengelye mindkét görbének, mert x helyett $-y$ -t és y helyett $-x$ -et írva is önmagába megy át mindkét egyenlet, tehát P -vel együtt f_2 -re való $P''(-y_0, -x_0)$ tükörképe is a görbén van.

Tekintsük ezért a görbéket abban a koordinátarendszerben, melynek tengelyei f_1 és f_2 . Az új koordinátákat x' , y' -vel jelölve x , y helyére

$$(3) \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

lép (lásd a gimn. III. o. tankönyv „Hiperbola más helyzetben” c. pontját, de x és x' , valamint y és y' cseréjével), és az új egyenletek

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2,5x'^2 + 3,5y'^2 = 16, \\ (2') \quad & 5x'^2 + 9y'^2 = 38. \end{aligned}$$

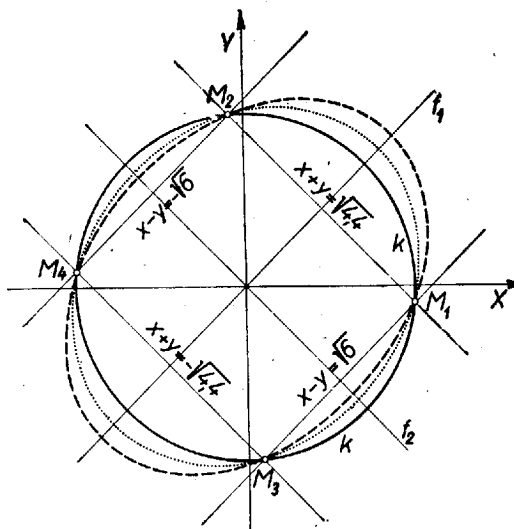
Eszerint mindkét görbe ellipszis a következő féltengelyekkel:

$$a_1 = \sqrt{\frac{16}{2,5}} \approx 2,53, \quad b_1 = \sqrt{\frac{16}{3,5}} \approx 2,14; \quad a_2 = \sqrt{\frac{38}{5}} \approx 2,76, \quad b_2 = \sqrt{\frac{38}{9}} \approx 2,05.$$

Látjuk, hogy $a_2 > a_1$ és $b_2 < b_1$, tehát a második ellipszis nagytengelyének végpontjai az első ellipszisen kívül vannak, kistengelyének végpontjai viszont annak belsejében, ezért a két ellipszis 4 pontban metszi egymást. Ezeket tudva már az eredeti rendszerben is ábrázolhatjuk (1) és (2)-t az

$$y = \frac{1}{6}(x \pm \sqrt{192 - 35x^2}) \quad y = \frac{1}{7}(2x \pm \sqrt{266 - 45x^2})$$

kifejezések alapján is, – ugyanis az (1'), (2') alapján való ábrázolás után a leolvasott x' , y' megoldásokból x , y -t ismét számítanunk kellene (3) alapján.



A metszéspontok 1 tizedes pontossággal

$$M_1(2,3; -0,2), \quad M_2(-0,2; 2,3), \quad M_3(0,2; -2,3) \text{ és } M_4(-2,3; 0,2).$$

Bodó Zoltán (Eger, Dobó I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2)-t ábrázoló görbék metszéspontjait úgy is megkaphatjuk, mint az egyenletrendszer átalakításával kapott újabb egyenleteket ábrázoló görbék metszéspontjait. Az ellipsziseknél sokkal könnyebben megrajzolható az I. megoldásbeli $x^2 + y^2 = 5,2$ kör és az $x + y = \pm\sqrt{4,4}$ egyenespár (felhasználva Pythagorász tételét és hogy

$$5,2 = 2,2^2 + 0,6^2 = 1,8^2 + 1,4^2, \text{ ill. } 4,4 = 2^2 + 0,6^2 + 0,2^2 = 1,8^2 + 1^2 + 0,4^2),$$

továbbá a II. megoldásbeli $x - y = \pm\sqrt{6}$ egyenespár ($6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$). A 4 metszéspontot vagy a kör és az egyik egyenespár adhatja, vagy pedig a két egyenespár.

Nagy Péter (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

2. A számítógépes megoldást előkészíthetjük az $y/x = q$ hányados kiszámításával is, ha (1) és (2)-ből előbb az állandó tagokat küszöböljük ki. (1) és (2)-t 19-cel, ill. -8 -cal szorozva és összeadva $x^2 + 13xy + y^2 = 0$, és innen $q = -6,5 \pm \sqrt{41,25}$. Most már pl. $y = qx$ helyettesítéssel (1)-ből $(3 - q + 3q^2)x^2 = 16$, és átalakításokkal $x = \pm\sqrt{2,6 \pm \sqrt{6,6}}$. – Ennek grafikus megfelelője az, hogy egyik görbe gyanánt az $y = q_1x$, $y = q_2x$ egyenespárt vesszük. (E két egyenes metszése, az origó, természetesen nem megoldása az (1), (2) rendszernek hiszen ez az egyenespár csak a rendszer egyik másodfokú egyenletét helyettesíti.)

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)