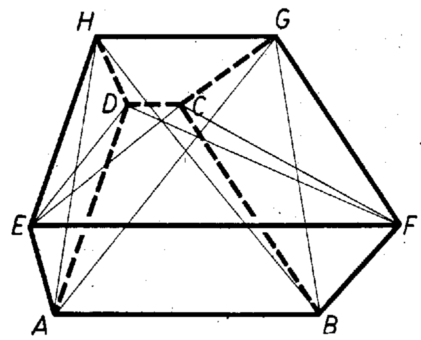
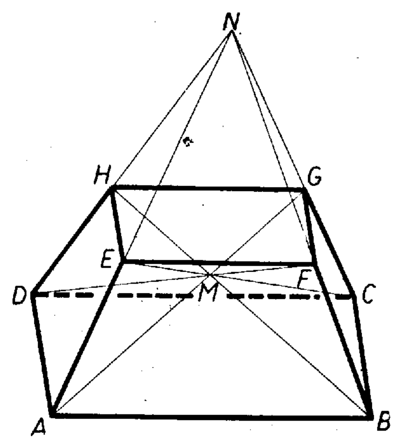



Alkalmazzuk az 1054. feladatban bebizonyított tételt[1] rendre az $ABGH$, $CDEF$, $ADHE$, $BCGF$ négyszögre:

$$\begin{aligned}
AG^2+BH^2&=AH^2+BG^2+2AB\cdot HG,\\
CE^2+DF^2&=CF^2+DE^2+2DC\cdot EF,\\
AH^2+DE^2&=AE^2+DH^2+2AD\cdot EH,\\
BG^2+CF^2&=BF^2+CG^2+2BC\cdot FG.
\end{aligned}$$

E négy egyenlőség összegéből a mindkét oldalon szereplő tagokat elhagyva a kívánt egyenlőség adódik.

Ha bármely két testátló metszi egymást, akkor a 471. gyakorlat[2] szerint egy $M$ ponton mennek át, hiszen nem lehetnek egy síkban.




Így az $AG$, $DF$ átlók végpontjai egy síkban vannak. Ez a sík az $ABCD$ és $EFGH$ lapoknak a feltevések folytán párhuzamos síkjait párhuzamos egyenesekben metszi, ezért $AD||FG$. Így $EH$, $AD$, $FG$ és $BC$ párhuzamosak, ennélfogva $ABCD$ és $EFGH$ paralelogrammák. Ekkor $AB\cdot HG=DC\cdot EF$, $AD\cdot EH=BC\cdot FG$, és a tétel így egyszerűsödik:

$$AG^2+BH^2+CE^2+DF^2=AE^2+BF^2+CG^2+DH^2+4AB\cdot HG+4AD\cdot EH.$$

Ebben az esetben a test paralelogramma alapú csonka gúla, vagyis az $AE$, $BF$, $CG$, $DH$ élek egy $N$ ponton mennek át. Ugyanis az $ADFG$ trapéz $AD$ és $FG$ oldalainak aránya, vagy ami ugyanaz, az $AD:EH$ arány egyenlő $AM:MG$-vel, folytatólag $M$-nek $AD$ és $FG$-től mért, és tovább az $ABCD$ és $EFGH$ síktól mért távolságainak $m_1:m_2$ arányával. Ugyanígy $AB:EF=AB:HG=m_1:m_2$, mert az $AG$ és $BH$ átlók metszéspontja ugyancsak $M$. Már most az $ABFE$ (konvex) trapéz $AE$ és $BF$ szárai $N$ metszéspontjának az $AB$, $EF$ oldalaktól mért távolságai arányának, és így az $AN:EN$-nek értéke ugyancsak $m_1:m_2$, és ez áll a $DCGH$, $ADEH$ trapézokra is. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. ($m_1=m_2$ esetén $N$ nem létezik, ekkor a test paralelepipedon.) Ekkor az $ACGE$ és $BDHF$ trapézek alapján az állítás következő módosulását is kimondhatjuk:

$$AG^2+BH^2+CE^2+DF^2=AE^2+BF^2+CG^2+DH^2+2AC\cdot EG+2BD\cdot FH.$$

*Glattfelder Péter* (Pannonhalma, Bencés g. IV o.t.)

[1] Lásd K. M. L. 23 (1961) 17. o. Ha a $PQRS$ konvex négyszögben $PQ||RS$, akkor $PR^2+QS^2=QR^2+SP^2+2\cdot PQ\cdot RS$.

[2] Lásd K. M. L. 17 (1958) 57. o. Ha a tér $n$ egyenese közül bármelyik kettő metszi egymást, akkor vagy egy síkban vannak, vagy egy ponton mennek át.

*Megjegyzés.* Azt, hogy a testátlók közös $M$ pontja létezése esetén a test csonka gúla, a következőkből is sejthetjük. Az $AD : EH = m_1 : m_2 = AB : EF$ aránypárból és a $BAD$, $FGH$ szögek térbeli váltószög voltából következik, hogy az $ABCD$ és $GHEF$ paralelogrammák hasonló helyzetűek, és hasonlósági pontjuk $M$. Kézenfekvőnek látszik tehát, hogy a $G$, $H$, $E$, $F$ csúcsok helyére $E$, $F$, $G$, $H$-t írva ugyancsak létezik hasonlósági pont, és ez $N$.