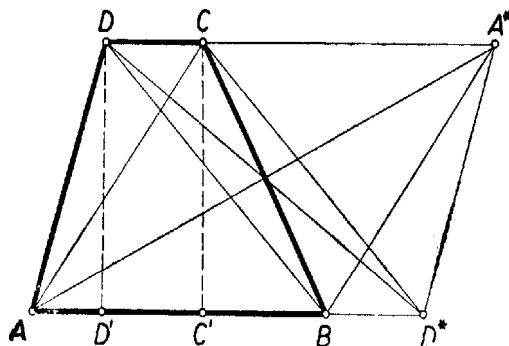




I. megoldás: AB és CD párhuzamossága folytán az $ABCD$ négyszög trapéz. Legyen a C, D csúcs vetülete AB -n C', D' , így az ACC', BDD', ADD' és BCC' derékszögű háromszögekből Pythagorász tételével

$$\begin{aligned} AC^2 &= AC'^2 + CC'^2, & AD^2 &= AD'^2 + DD'^2, \\ BD^2 &= BD'^2 + DD'^2, & BC^2 &= BC'^2 + CC'^2. \end{aligned}$$

Ezekből (1) négyzetes tagjaira

$$\begin{aligned} (2) \quad AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 &= \\ &= (AC'^2 - AD'^2) + (BD'^2 - BC'^2), \end{aligned}$$

és azt kell megmutatnunk, hogy itt a jobb oldal egyenlő $2AB \cdot CD$ -vel.

Feltehetjük, hogy az A -nál levő szög nem nagyobb derékszögnél, így a konvexitás miatt az AB egyenesen A, D', C' egymás után következő pontok: $AD' < AC'$. Ezért (2) jobb oldalának első különbsége

$$\begin{aligned} (3) \quad AC'^2 - AD'^2 &= (AC' - AD')(AC' + AD') = D'C'(AC' + AD') = \\ &= CD(AC' + AD'). \end{aligned}$$

A második különbség B, D' és C' kölcsönös helyzete szerint háromféleképpen alakulhat:

$$\begin{aligned} AD' < AC' &= AB \text{ esetén } (D'B - C'B)(D'B + C'B) = CD(D'B + C'B), \\ AD' < AB < AC' &\text{ esetén } (D'B - BC')(D'B + BC') = (D'B - BC')CD, \\ AB \leq AD' < AC' &\text{ esetén } (BD' - BC')(BD' + BC') = CD(-BD' - BC'). \end{aligned}$$

Ezt (3)-hoz adva CD kiemelése után a feltevés figyelembevételével a zárójelben mindig $2AB$ adódik. Evvel az állítást bebizonyítottuk.

Bónis Katalin (Budapest, Veres Pálné lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Elkerülhetjük az esetek szétválasztását, ha az átlók négyzetét a trapéz 4 rész-háromszögéből a koszinusz-tétellel fejezzük ki, figyelembe véve, hogy $\cos DCB \triangleleft = -\cos ABC \triangleleft$ és $\cos ADC \triangleleft = -\cos BAD \triangleleft$:

$$\begin{aligned} (4) \quad AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos ABC \triangleleft, \\ (5) \quad BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos BAD \triangleleft, \\ (6) \quad AC^2 &= CD^2 + AD^2 + 2CD \cdot AD \cos BAD \triangleleft, \\ (7) \quad BD^2 &= CD^2 + BC^2 + 2CD \cdot BC \cos ABC \triangleleft. \end{aligned}$$

Adjuk hozzá (6) és (7) AB -szereséhez (4) és (5) CD -szeresét:

$(AB + CD)(AC^2 + BD^2) = (AB + CD)(AD^2 + BC^2) + 2AB \cdot CD(AB + CD)$, amiből a 0-tól különböző $AB + CD$ -vel osztva (1)-re jutunk. – Az esetek szétválasztását az tette elkerülhetővé, hogy a koszinusz-tételről annak idején megmutattuk, hogy hegyes-, tompa- és derékszögű háromszögre egyaránt érvényes.

Nagy Irén (Dombóvár, Gőgös I. g. IV. o. t.)

2. Lényegében ugyanígy kerülhetjük el az esetszétválasztást, ha ábránkra koordináta-rendszert helyezünk, és a kifejezéseket a csúcsok koordinátaival állítjuk elő.

Lázár Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

3. Az állítás a húrnégyszögre vonatkozó Ptolemaiosz-tétel felhasználásával is bizonyítható.

Nagypál Botond (Orosháza, Táncsics M. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit tovább használva tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC oldal felezőpont-jára, legyen A és D képe A^* , D^* , és alkalmazzuk az 1006. feladat¹ első tételét az ABA^*C , BD^*CD és AD^*A^*D paralelogrammákra:

$$(8) \quad 2AC^2 + 2AB^2 = AA^{*2} + BC^2,$$

$$(9) \quad 2BD^2 + 2CD^2 = DD^{*2} + BC^2,$$

$$(10) \quad 2AD^2 + 2(AB + CD)^2 = AA^{*2} + DD^{*2}.$$

Mármost (8) és (9) összegéből (10)-et kivonva rendezés és egyszerűsítés után (1)-et kapjuk.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Az állítást vektoralgebrai úton bizonyítjuk.

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC})^2 = \\ &= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC}^2 - 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} = \\ &= AD^2 + BC^2 + 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{DC} = AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}. \end{aligned}$$

Ha már most $AB \parallel CD$, és a trapéz nem hurkolt, vagyis AB és DC egyirányúak, akkor

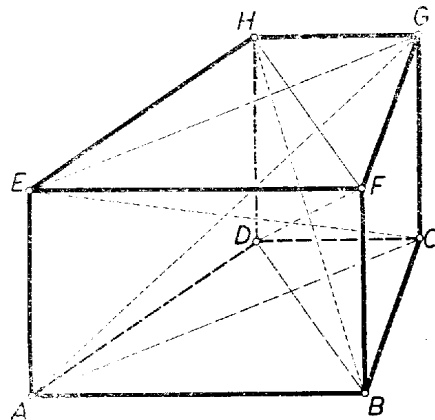
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD,$$

amit bizonyítanunk kellett. Egyúttal a tétel általánosítását kaptuk tetszés szerinti konvex négyszögre: ha az AB és CD oldalak szöge φ , akkor

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD \cos \varphi.$$

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A bebizonyított tétel és az 1006. feladat segédtetele felhasználásával kifejezhetjük a trapéz alapú hasáb testátlóinak négyzetösszegét az éleivel.



Ha az $ABCD$ trapéz ($AB \parallel CD$) alapú $ABCDEFGH$ hasáb oldalélei AE , BF , CG , DH , akkor a testátlók négyzetösszege, mint az $ACGE$ és $BDHF$ paralelogrammák átlóinak négyzetösszege:

$$\begin{aligned} (AG^2 + CE^2) + (BH^2 + DF^2) &= 2AC^2 + 2BD^2 + 4AE^2 = 2AD^2 + 2BC^2 + 4AB \cdot CD + 4AE^2 = \\ &= (AD^2 + BC^2 + EH^2 + FG^2) + (AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2) + 2AB \cdot CD + 2EF \cdot GH. \end{aligned}$$

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr I. g. III. o. t.)

¹Lásd a megoldást K. M. L. 21 (1960) 20. o.