

a) Ismeretes, hogy egy adott S síkban fekvő és a sík két adott A, B pontjától egyenlő távolságra levő egyenesek összessége – mértani helye – két részből tevődik össze: I. α) egyrészt az AB szakasz C_1 felező pontján átmenő, I. β) másrészt az AB -vel párhuzamos egyenesek összességéből.¹ Esetünkben a C harmadik csúcs is szerepel, ezért a keresett egyenesnek bele kell tartoznia az A és C , valamint a B és C pontpártól egyenlő távolságra levő egyenesek összességébe is, vagyis a fenti feltételek egyikén felül teljesítenie kell a következő feltételpárok egy-egy feltételét is:

- II. α) átmegy AC -nek B_1 felezőpontján,
- β) vagy párhuzamos AC -vel,
- III. α) átmegy BC -nek A_1 felezőpontján,
- β) vagy párhuzamos BC -vel.

Az ABC háromszög oldalai különböző irányúak, ezért a β) feltétel legfeljebb egy pontpárra teljesülhet; hasonlóan az α) feltétel legfeljebb 2 pontpárra, mert az A_1, B_1, C_1 pontok nincsenek egy egyenesen. Mivel pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög c_1, a_1, b_1 oldalai az ABC háromszögben középvonalak és rendre párhuzamosak AB, BC, CA -val, azért e középvonalak, és csak ezek, megfelelnek a követelménynek.

b) Tegyük fel, hogy van az S -sel párhuzamos és A, B, C -től egyenlő távolságra levő egyenes, és legyen egy ilyen e , vagyis ha A, B, C vetülete e -re A', B', C' , akkor $AA' = BB' = CC' = d$. Legyen továbbá A', B', C' vetülete S -re A'', B'', C'' , ezek e -nek S -re való e'' vetületén vannak és $A'A'' = B'B'' = C'C'' = t$. Ekkor az $AA'A'', BB'B''$ és $CC'C''$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert 2–2 oldaluk egyenlő: d , ill. t , a d -vel szemben mindháromban derékszög fekszik, és ezért d nagyobb t -nél. Így $AA'' = BB'' = CC'' = d'$.

Az említett háromszögek síkjai merőlegesek e -re és így e'' -re is, mert pl. $AA' \perp e$, és $A'A'' \perp e'' \parallel e$. Ezért AA'', BB'', CC'' merőlegesek e'' -re, és az egyenlő AA'', BB'', CC'' szakaszok az ABC háromszög csúcsainak e'' -től való távolságát adják. Azt nyertük tehát, hogy e'' azonos az S -sík a) alatt meghatározott egyenesével, tehát e az S -re a_1, b_1, c_1 -ben emelt merőleges síkok valamelyikének egy az S -sel párhuzamos egyenes.

c) Feltéve, hogy van olyan az i -vel párhuzamos e egyenes, amelyre az előbbi jelölésekkel $AA' = BB' = CC' = d$, vetítsük a rendszert egy az i -re merőleges S^* síkra és legyen A, B, C vetülete A_0, B_0, C_0 , továbbá e, A', B', C' egybeeső vetülete az E pont. Ekkor AA', BB', CC' párhuzamosak S^* -gal, és ezért vetületükre $A_0E = B_0E = C_0E = d$, vagyis E az S^* -nak az A_0, B_0, C_0 -től egyenlő távolságra levő pontja, az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt kör középpontja; e pedig az E -n átmenő, i -vel párhuzamos egyenes.

A_0, B_0, C_0 egymástól különböző, nem egy egyenesbe eső pontok, mert A, B, C vetülete csak az S -re merőleges síkon eshet páronként egybe, vagy egy egyenesbe, ilyen S^* viszont csak az S -ben fekvő i -hez tartozhat. Nyilvánvaló végül, hogy bármely az i -re merőleges S^* -ot véve ugyanazon e -hez jutunk, tehát ebben az esetben egy és csak egy megfelelő egyenes van.

Varga Szabolcs (Miskolc, Bláthy O. vill. ip. t. IV. o. t.)

¹Lásd Vigassy Lajos: Egyenesek mértani helye. K. M. L. 20 (1960) 82–91. o., közelebbről 83. o.