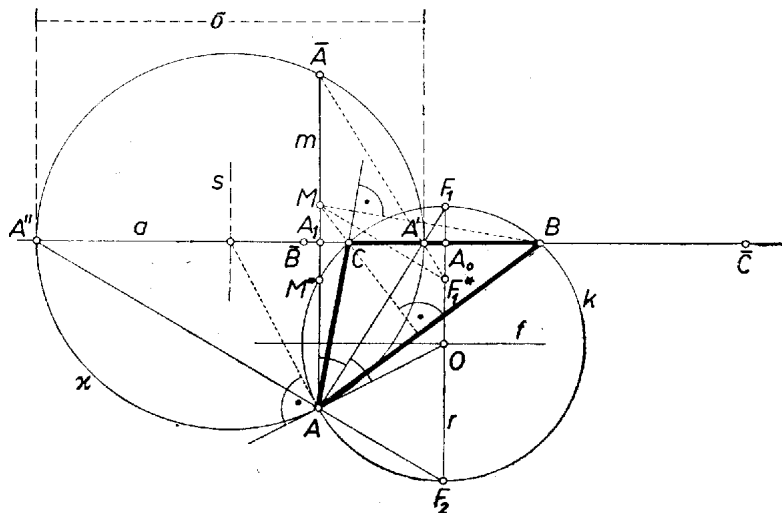


I. megoldás: Az $A'A''$ összekötő egyenes megadja a $BC = a$ oldalegyenest. Az AA' belső és AA'' külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért A az $A'A''$ szakasz fölé írt \sphericalangle Thalész-körön van. Másrészt $AM = m$ merőleges BC -re, tehát A -t \sphericalangle és m metszéspontja tűzi ki. Legyen m és a metszéspontja A_1 .

Ismeretes, hogy M -nek A_1 -re való M^* tükörképe rajta van a háromszög k körülírt körén, ezért k -nak O középpontja az AM^* szakasz felező merőlegesén fekszik. Másrészt AA' felezi az OAA_1 szöget,¹ ezért O rajta van AA_1 -nek AA' -re való tükörképén. Ezekből O megszerkeszthető. Végül az O körül OA sugárral írt k kör a -ból kimetszi a B, C csúcsokat.



1. ábra

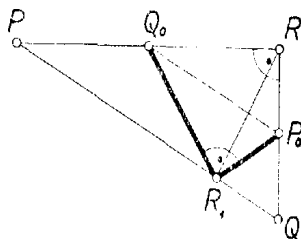
Nem kapunk A pontot, ha M kívül van azon a σ síksávon, amelyet az A' és A'' -ben $A'A''$ -re állított merőlegesek határolnak. Akkor sincs megoldás, ha M σ -nak egyik határegyenesén van, mert így A a BC egyenesre esnék. σ belsejében levő M -mel A -ra 2 helyzet adódik a két oldalán: A és \bar{A} . – M^* egyértelműen szerkeszthető. AA_1 fenti tükörképe akkor és csak akkor nem tűzi ki O -t, ha párhuzamos f -fel, és így a -val is. Ilyenkor $A_1AA' \sphericalangle = 45^\circ$, és A (tehát M is) σ -nak s felezővonalán van, vagyis $MA' = MA''$. – Ha $MA' < MA''$, akkor nyilván $OA' < OA''$, viszont $MA' > MA''$ esetén A' és A'' szerepe felcserélődik. k akkor és csak akkor metszi a -t, ha O -nak a -tól való távolsága kisebb OA -nál. A -nak arra a helyzetére, amely a -nak M -et tartalmazó pontján van, mindig kapunk megoldást, mert így $AM^* > AA_1$ (és ebben B és C -nél hegyesszög van.)

Ha M az a -n van, akkor a háromszög derékszögű, a 2 megoldás egymás tükörképe. (Mindkettő megoldásnak tekintendő, mert kizárólag helyzetadatokból szerkesztünk, tehát az ABC háromszög csúcsainak is a lehetséges helyzeteit keressük.) Akkor is derékszögű háromszög a megoldás, ha M a \sphericalangle körön van (s így A egyik helyzete M -be esik); ilyenkor a másik megoldás elfajul.

Gallyas Györgyi (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Legyenek F_1 , és F_2 a BC oldal felező merőlegesének k -n levő pontjai, a két BC ív felezőpontjai. Az AO egyenest abból is megkaphatjuk, hogy az AF_1F_2 háromszög súlyvonala AO . Mivel F_1 az AA' -n, F_2 pedig az AA'' -nek A -n túli meghosszabbításán van, azért az AO egyenest bármely az AF_1F_2 -höz hasonló helyzetű háromszög súlyvonalából megkaphatjuk: ha egy az $A'A''$ -re merőleges tetszés szerinti egyenes AA' -t, AA'' -t G_1, G_2 -ben metszi, és G_1G_2 felezőpontja G , akkor $AO \equiv AG$.

2. Továbbmenve AO -t mint \sphericalangle -nak A -beli érintőjét is megkaphatjuk. Ha ugyanis valamely az R -nél derékszögű PQR háromszög PR, QR befogójának felezőpontja Q_0, P_0 , és R vetülete PQ -ra R_1 (2. ábra), akkor R és R_1 a P_0Q_0 -ra tükrösek, ennél fogva a PRR_1 és ORR_1 , háromszögek R_1 -ből kiinduló súlyvonalai egymásra merőlegesek.



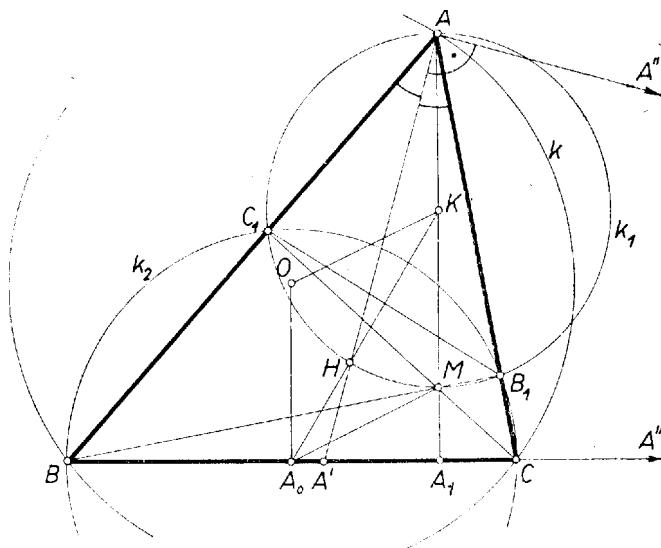
2. ábra

¹L. pl. az 598. gyakorlatot K. M. L. 21 (1960) 23. o.

3. Sok dolgozat a megoldások számát legfeljebb 1-ben állapította meg, mert A -nak csak egyik helyzetét vette tekintetbe. Ezt vagy a szűk szemlélettel lehet megmagyarázni, hogy M -nek a háromszög belsejében „kell” lennie, másképpen, hogy a háromszög csak hegyesszögű lehet –, vagy annak az elvnek téves értelmezésével, hogy szimmetrikus megoldások egyikét mellőzni szoktuk. A és \bar{A} valóban szimmetrikus $A'A''$ -re, viszont M általában az egyik félsíkon van, tehát a két félsík nem egyenértékű. – Az efféle nézetek némi ellensúlyozása végett ábránkon a szétválasztott A és M esetét részleteztük, a másik megoldásnak csak \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} csúcsait tüntettük fel.

A következő két megoldás A -nak a fentiek szerinti ismeretére támaszkodva más úton fejezi be a szerkesztést.

II. megoldás: Megszerkesztjük a BC oldal A_0 felezőpontját. Legyen az AM átmérő fölötti k_1 kör középpontja K (3. ábra), továbbá AB -vel, AC -vel és AA' -vel való metszéspontja rendre C_1 , B_1 , H .



3. ábra

Így $MC_1A \perp = MB_1A \perp = 90^\circ$, tehát C_1 és B_1 a C , ill. B -ből húzott magasság talppontja. AH felezi a $BAC = C_1AB_1$ szöget, ezért H felezi az egyik C_1B_1 ívet, ennél fogva a B_1C_1 szakasz felező merőlegese KH . Másrészt B_1 és C_1 a BC átmérő fölötti vagyis A_0 középpontú k_2 Thalész-körnek pontjai, ezért B_1C_1 felező merőlegese átmegy A_0 -on. Ezek szerint KH és a metszéspontja A_0 .

Most már O -t abból kapjuk, hogy irány és nagyság szerint $A_0O = MA/2 = MK = KA$, ennél fogva O az A_0MKO (vagy A_0KAO) paralelogramma negyedik csúcsa.

Nagy Csaba (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A_0 ismeretében O -t megkaphatjuk az Euler–egyenesen fekvő nevezetes pontok közti távolságviszonyok alapján is: A_0A -nak A_0 -hoz közelebbi harmadoló pontja az S súlypont, és MS az A_0 -ban a -ra állított merőlegest O -ban metszi.

Glattfelder Péter (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.)

III. megoldás: Az $A_0O = MA/2$ összefüggés és némi számítás alapján megszerkeszthetjük F_1 -nek a -ra való F_1^* tükörképét (1. ábra), majd az ezen át a -ra állított merőlegessel az I. megoldás f egyeneséből kimetszhetjük O -t. k sugarát r -rel jelölve

$$\begin{aligned} F_2F_1^* &= F_2A_0 - F_1^*A_0 = F_2A_0 - A_0F_1 = \\ &= (r + OA_0) - (r - OA_0) = 2OA_0 = AM, \end{aligned}$$

így $F_2AMF_1^*$ paralelogramma, tehát F_1^*M párhuzamos $F_2A \equiv AA''$ -vel. Másrészt F_1^* , mint AA'' tükörképének pontja, rajta van az AA' egyenesen, tehát megszerkeszthető. (Hasonlóan metszhetjük ki F_2 tükörképét az M -en át AA' -vel húzott párhuzamosból az $\bar{A}A''$ egyenessel.)

Megjegyzés. Több számolás alapján az A_0A_1 szakaszt negyedik arányosként megszerkeszthetjük és A_0 -t így is kitűzhetjük.

Frint Gábor (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)