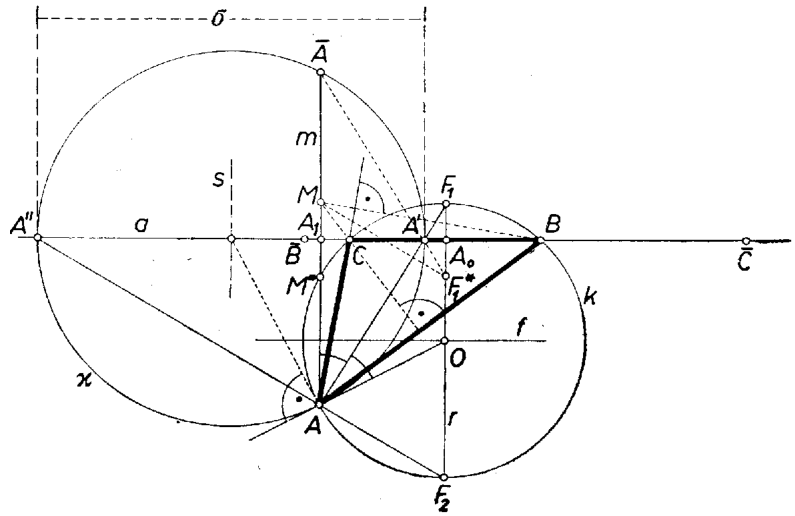
I. megoldás: Az $A'A''$ összekötő egyenes megadja a $BC = a$ oldalegyenest. Az AA' belső és AA'' külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért A az $A'A''$ szakasz fölé írt $\varkappa$ Thalész–körön van. Másrészt $AM = m$ merőleges BC-re, tehát A-t $\varkappa$ és m metszéspontja tűzi ki. Legyen m és a metszéspontja A_1.

Ismeretes, hogy M-nek A_1-re való M^* tükörképe rajta van a háromszög k körülírt körén, ezért k-nak O középpontja az AM^* szakasz felező merőlegesén fekszik. Másrészt AA' felezi az OAA_1 szöget,[1] ezért O rajta van AA_1-nek AA'-re való tükörképén. Ezekből O megszerkeszthető. Végül az O körül OA sugárral írt k kör a-ból kimetszi a B, C csúcsokat.



1. ábra

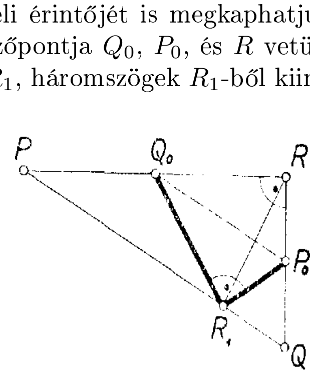
Nem kapunk A pontot, ha M kívül van azon a σ síksávon, amelyet az A' és A''-ben $A'A''$-re állított merőlegesek határolnak. Akkor sincs megoldás, ha M σ-nak egyik határegyenesén van, mert így A a BC egyenesre esnék. σ belsejében levő M-mel A-ra 2 helyzet adódik a két oldalán: A és $\overline{A}$. – M^* egyértelműen szerkeszthető. AA_1 fenti tükörképe akkor és csak akkor nem tűzi ki O-t, ha párhuzamos f-fel, és így a-val is. Ilyenkor $A_1AA'\sphericalangle = 45°$, és A (tehát M is) σ-nak s felezővonalán van, vagyis $MA' = MA''$. – Ha $MA' < MA''$, akkor nyilván $OA' < OA''$, viszont $MA' > MA''$ esetén A' és A'' szerepe felcserélődik. k akkor és csak akkor metszi a-t, ha O-nak a-tól való távolsága kisebb OA-nál. A-nak arra a helyzetére, amely a-nak M-et tartalmazó pontján van, mindig kapunk megoldást, mert így $AM^* > AA_1$ (és ebben B és C-nél hegyesszög van.)

Ha M az a-n van, akkor a háromszög derékszögű, a 2 megoldás egymás tükörképe. (Mindkettő megoldásnak tekintendő, mert kizárólag helyzetadatokból szerkesztünk, tehát az ABC háromszög csúcsainak is a lehetséges helyzeteit keressük.) Akkor is derékszögű háromszög a megoldás, ha M a $\varkappa$ körön van (s így A egyik helyzete M-be esik); ilyenkor a másik megoldás elfajul.

Gallyas Györgyi (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Legyenek F_1, és F_2 a BC oldal felező merőlegesének k-n levő pontjai, a két BC ív felezőpontjai. Az AO egyenest abból is megkaphatjuk, hogy az AF_1F_2 háromszög súlyvonala AO. Mivel F_1 az AA'-n, F_2 pedig az AA''-nek A-n túli meghosszabbításán van, azért az AO egyenest bármely az AF_1F_2-höz hasonló helyzetű háromszög súlyvonalából megkaphatjuk: ha egy az $A'A''$-re merőleges tetszés szerinti egyenes AA'-t, AA''-t G_1, G_2-ben metszi, és G_1G_2 felezőpontja G, akkor $AO \equiv AG$.

2. Továbbmenve AO-t mint $\varkappa$-nak A-beli érintőjét is megkaphatjuk. Ha ugyanis valamely az R-nél derékszögű PQR háromszög PR, QR befogójának felezőpontja Q_0, P_0, és R vetülete PQ-ra R_1 (2. ábra), akkor R és R_1 a P_0 Q_0-ra tükrösek, ennélfogva a PRR_1 és ORR_1, háromszögek R_1-ből kiinduló súlyvonalai egymásra merőlegesek.



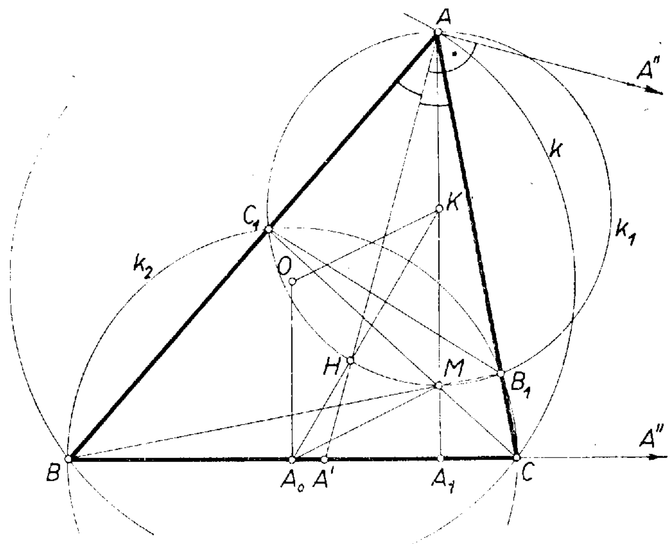
2. ábra

[1]L. pl. az 598. gyakorlatot K. M. L. 21 (1960) 23. o.

3. Sok dolgozat a megoldások számát legfeljebb 1-ben állapította meg, mert A-nak csak egyik helyzetét vette tekintetbe. Ezt vagy azzal a szűk szemlélettel lehet megmagyarázni, hogy M-nek a háromszög belsejében „kell” lennie, másképpen, hogy a háromszög csak hegyesszögű lehet –, vagy annak az elvnek téves értelmezésével, hogy szimmetrikus megoldások egyikét mellőzni szoktuk. A és $\overline{A}$ valóban szimmetrikus $A'A''$-re, viszont M általában az egyik félsíkon van, tehát a két félsík nem egyenértékű. – Az efféle nézetek némi ellensúlyozása végett ábránkon a szétválasztott A és M esetét részleteztük, a másik megoldásnak csak $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ csúcsait tüntettük fel.

A következő két megoldás A-nak a fentiek szerinti ismeretére támaszkodva más úton fejezi be a szerkesztést.

II. megoldás: Megszerkesztjük a BC oldal A_0 felezőpontját. Legyen az AM átmérő fölötti k_1 kör középpontja K (3. ábra), továbbá AB-vel, AC-vel és AA'-vel való metszéspontja rendre C_1, B_1, H.



3. ábra

Így $MC_1A\sphericalangle = MB_1A\sphericalangle = 90^\circ$, tehát C_1 és B_1 a C, ill. B-ből húzott magasság talppontja. AH felezi a $BAC = C_1AB_1$ szöget, ezért H felezi az egyik C_1B_1 ívet, ennélfogva a B_1C_1 szakasz felező merőlegese KH. Másrészt B_1 és C_1 a BC átmérő fölötti vagyis A_0 középpontú k_2 Thalész-körnek pontjai, ezért B_1C_1 felező merőlegese átmegy A_0-on. Ezek szerint KH és a metszéspontja A_0.

Most már O-t abból kapjuk, hogy irány és nagyság szerint $A_0O = MA/2 = MK = KA$, ennélfogva O az A_0MKO (vagy A_0KAO) paralelogramma negyedik csúcsa.

Nagy Csaba (Budapest, József A. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A_0 ismeretében O-t megkaphatjuk az Euler–egyenesen fekvő nevezetes pontok közti távolságviszonyok alapján is: A_0A-nak A_0-hoz közelebbi harmadoló pontja az S súlypont, és MS az A_0-ban a-ra állított merőlegest O-ban metszi.

Glattfelder Péter (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.)

III. megoldás: Az $A_0O = MA/2$ összefüggés és némi számítás alapján megszerkeszthetjük F_1-nek a-ra való F_1^* tükörképét (1. ábra), majd az ezen át a-ra állított merőlegessel az I. megoldás f egyeneséből kimetszhetjük O-t. k sugarát r-rel jelölve

$$\begin{aligned} F_2F_1^* &= F_2A_0 - F_1^*A_0 = F_2A_0 - A_0F_1 = \\ &= (r + OA_0) - (r - OA_0) = 2OA_0 = AM, \end{aligned}$$

így $F_2AMF_1^*$ paralelogramma, tehát F_1^*M párhuzamos $F_2A \equiv AA''$-vel. Másrészt F_1^*, mint AA'' tükörképének pontja, rajta van az AA' egyenesen, tehát megszerkeszthető. (Hasonlóan metszhetjük ki F_2 tükörképét az M-en át AA'-vel húzott párhuzamosból az $\overline{A}A''$ egyenessel.)

Megjegyzés. Több számolás alapján az A_0A_1 szakaszt negyedik arányosként megszerkeszthetjük és A_0-t így is kitűzhetjük.

Frint Gábor (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)