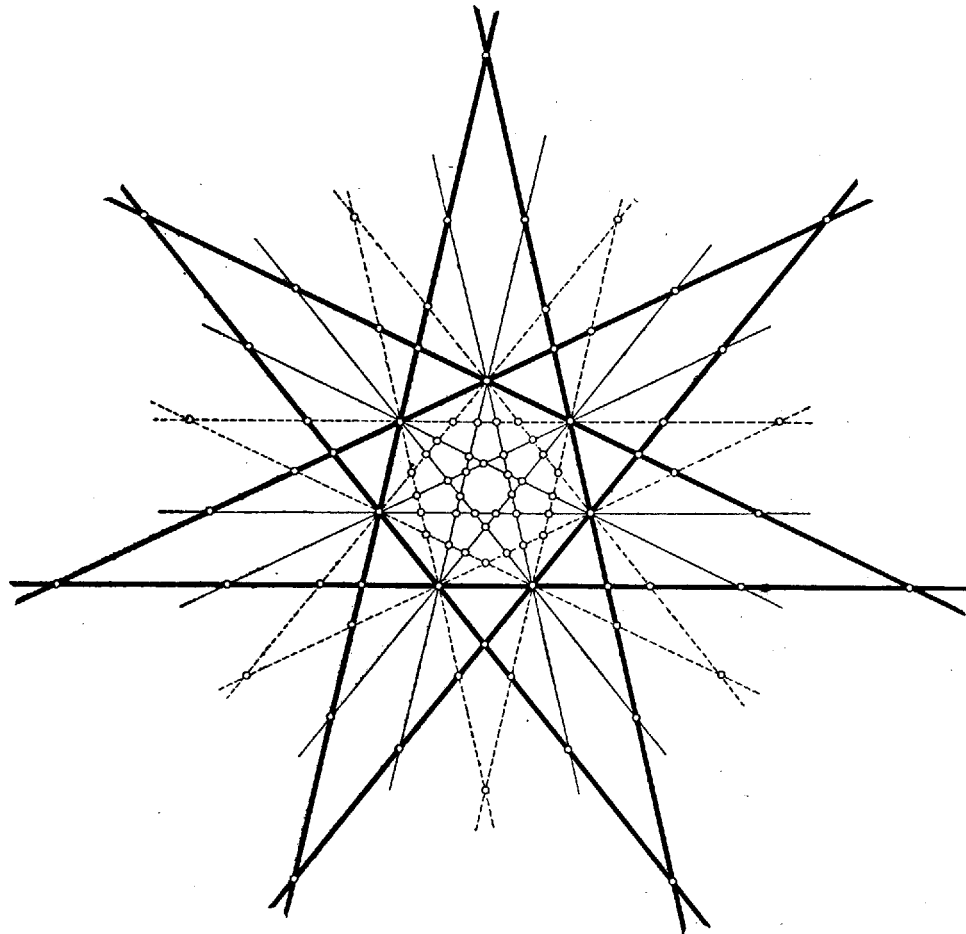


I. Tekintsük először a metszéspontok számának kérdését.

a) A H hétszög mindegyik oldalegyenesét a többi 6 oldalegyenes mindegyike metszi (1. ábra, vastag), mert nincsenek köztük párhuzamosak, éspedig mindegyik más pontban. Ugyanis H konvex, mindegyik oldalegyenesének az egyik partján fekszik, ezért a bármelyik két oldalegyenes által létrejött 4 szögtartomány közül csak egyben van pontja úgy, hogy ennek mindegyik szárán van csúcsa. Ha a szögtartomány csúcsán egy harmadik oldalegyenes is átmenne, ez kettévágná H -t, ami lehetetlen. – A metszéspontok összes száma $7 \cdot 6/2 = 21$, mert a $7 \cdot 6$ szorzatban minden metszéspontot 2-szer veszünk számba.



1. ábra

b) Kétféle átló van. Az egyik féle egy csúcsból a rá következő 2-ik csúcshoz vezet, merőleges a közbülső csúcson átmenő szimmetriatengelyre, és így párhuzamos az ezen csúccsal szemben fekvő oldallal (az ábrán szaggatva). A másik féle átló a kiindulási csúcsot a rá következő 3-ik csúccsal köti össze, párhuzamos a közbülső 2 csúcsot összekötő oldallal. Mindkét féle átlóból 7 van. A párhuzamosságok folytán a 14 átló- és 7 oldalegyenes 3-asával 7 irányt képvisel, bármelyik két irány közti szög a $180^\circ/7 = \varepsilon$ szögnek egész számú többszöröse.

Mármost a 14 átló mindegyikét 12 másik metszi, éspedig $3 - 3$ átló $1 - 1$ csúcspontban, mert H minden csúcsán 4 átló megy át, a többi 6 külön-külön. Eszerint $14 \cdot 6/2 = 42$ metszésponton $2 - 2$ átlóegyesen megy át, a 7 csúcsot hozzájuk véve az átlóegyesek különböző metszéspontjainak száma 49.

c) A 21 oldal- és átlóegyes mindegyikét 18 másik metszi, éspedig $5 - 5$ az illető egyenesen levő 2 csúcsban, mert H minden csúcsán 6 egyenes megy át, a többi $18 - 2 \cdot 5 = 8$ külön-külön. Eszerint $21 \cdot 8/2 = 84$ metszésponton $2 - 2$ egyenes megy át, és a különböző metszéspontok száma $84 + 7 = 91$.

II. a) Három egyenes csak akkor nem határoz meg háromszöget, ha egy ponton mennek át, vagy ha van köztük párhuzamos. Az oldalegyenesek rendszerében ez egyetlen egyeneshármásra sem teljesül, bármely kiválasztott 3 oldalegyenes háromszöget ad. A háromszög oldalegyenesének megválasztásában lépésről lépésre haladva az a oldalegyenest H oldalegyenesei közül 7-féleképpen választhatjuk, b -t a fennmaradtakból 6, végül c -t 5-féleképpen. Az így adódó $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ megválasztásban azonban minden háromszöget annyiszor veszünk tekintetbe, ahányféleképpen egymás utáni oldalegyeneseit megbetűzhetjük, vagyis 6-féleképpen:

$$a, b, c; \quad a, c, b; \quad b, a, c; \quad b, c, a; \quad c, a, b; \quad c, b, a.$$

Eszerint a különböző háromszögek száma $210 : 6 = 35$.

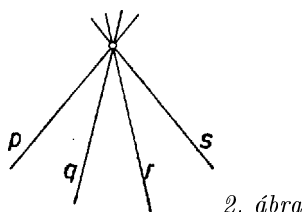
b) Az előző megfontolás mintájára az átlóegyenesek közül a -t 14-, b -t pedig $14 - 2 = 12$ -féleképpen választhatjuk (mert az a -nak vett átlóval párhuzamos átlóval nem kapnánk háromszöget). Ha a és b nem H valamely csúcsában metszik egymást – a $14 \cdot 12$ lehetőségből I. b) szerint $14 \cdot 6$ esetben –, akkor c gyanánt a hátralevő $14 - 2 \cdot 2 = 10$ más irányú átló mindegyike vehető. A további $14 \cdot 6$ esetben a és b metszéspontján még 2 átló megy át, ezért c választására csak $10 - 2 = 8$ lehetőség marad. Az így számba vett $14 \cdot 6 \cdot 10 + 14 \cdot 6 \cdot 8 = 1512$ háromszög ismét 6-onként csak oldalainak sorrendjében különbözik, így a különbözők száma 252.

c) Mind a 21 egyenes közül a és b $21 \cdot 18$ -féleképpen választható. Metszéspontjuk I. c) szerint $21 \cdot 8$ esetben nem csúcsa H -nak és $21 \cdot 10$ esetben csúcsa; ezért c gyanánt $21 - 2 \cdot 3 = 15$, ill. $15 - (6 - 2) = 11$ egyenes választható, és a különböző háromszögek száma $(21 \cdot 8 \cdot 15 + 21 \cdot 10 \cdot 11)/6 = 805$.

III. Az egyenlő szárú háromszögek hasonló megszámlálása céljára megjegyezzük, hogy mivel szögeik ε többszörösei, és összegük $180^\circ = 7\varepsilon$, azért a főcsúcsukban levő szög ε -nak páratlan számú többszöröse. Így bármely két egyenesünk metszéspontja szerepelhet egyenlő szárú háromszög főcsúcsa gyanánt, mert az általuk bezárt 2-féle szög egyike páratlan többszöröse ε -nak, hiszen összegük páratlan többszöröse neki. Ha a két szár egyenesét megválasztottuk, akkor a köztük levő $2k\varepsilon$ alakú szög (a főcsúcsnál levő külső szög) felezője kijelöli az alap egyenesének irányát.

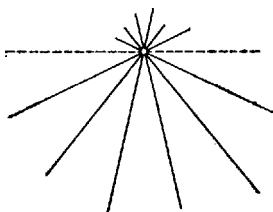
a) Az oldalegyenesek rendszeréből a két szárt a fentiekhez hasonlóan $7 \cdot 6/2 = 21$ -féleképpen választhatjuk meg. Mivel minden metszésponton csak 2 oldalegyenes megy át, azért a szárakhoz a fentiek szerint meghatározott alap-irányt képviselő egyetlen egyenes nem megy át a szárak metszéspontján, így minden esetben 1 egyenlő szárú háromszöget kapunk. Összes számuk 21, éppen annyi, mint az oldalegyenesek metszéspontjainak száma. Valóban, az előzők szerint az oldalegyenesek minden metszéspontja 1 egyenlő szárú háromszögben szerepel főcsúcs gyanánt.

b) Az átlóegyenesek 42 olyan metszéspontját véve főcsúcs gyanánt, amelyen csak 2 egyenes megy át – amely tehát nem csúcsa H -nak, – minden esetben 2 egyenlő szárú háromszöget kapunk, mert a fentiek szerint meghatározott alapiránnyal 2 átló párhuzamos.



2. ábra

Ha pedig H valamely csúcsát vesszük főcsúcsnak, a rajta átmenő 4 átlóegyenes közül a 2 szárat $4 \cdot 3/2 = 6$ -féleképpen választhatjuk. Ezek közül 2 esetben a köztük levő $2k\varepsilon$ alakú szög felezője ugyancsak átlóegyenes, ugyanis a 2. ábrán q felezi az r és p közti szöget, és r az s és q közöttit; a többi 4 esetben ez nem áll fenn. E 4 esetben a 2 szár ugyancsak 2 átlóval alkot egyenlő szárú háromszöget. A 2 kiemelt esetben viszont 1 – 1 háromszög elmarad. Így H mindegyik csúcsa $4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$ egyenlő szárú háromszögnek főcsúcsa. Az átlóegyenesekkel meghatározott egyenlő szárú háromszögek összes száma $42 \cdot 2 + 7 \cdot 10 = 154$.



3. ábra

c) Hasonlóan az átló és oldalegyeneseknek mind a 84 olyan metszéspontja, melyen csak 2 egyenes megy át, 3 egyenlő szárú háromszögnek főcsúcsa, mert a szárakkal meghatározott alap-iránnyal 3 egyenes párhuzamos. A H bármelyik csúcsán átmenő 6 egyenes közül (3. ábra) a szárak $6 \cdot 5/2 = 15$ -féleképpen választhatók. Az alap iránya majdnem minden esetben az illető csúcson átmenő egyenesek között is szerepel, csak abban a 3 esetben nem, amelyben a 2 szár az illető csúcsban hiányzó egyetlen irányra tükrös. Ebben a 3 esetben a 2 szár 3-féleképpen egészíthető ki egyenlő szárú háromszöggé, a többi 12 esetben csak 2-féleképpen. Mindezek szerint az átló- és oldalegyenesekkel meghatározott háromszögek közül az egyenlő szárúak száma: $84 \cdot 3 + 7(3 \cdot 3 + 12 \cdot 2) = 483$.

IV. A 7 második féle átló H belsejében egy kisebb H_1 szabályos hétszöget határol (1. ábra), ezen az első féle átlók nem mennek át, mert a középponttól távolabb vannak, mint a második féle átlók. H_1 mindegyik oldalához 1 – 1 egyenlő szárú háromszög csatlakozik, ezek szomszédos párjai közé 1 – 1 szimmetrikus ötszög (összesen 7), majd ezek közé 1 – 1 deltoid illeszkedik, így az első féle átlókkal határolt H_2 szabályos hétszög területén $1 + 3 \cdot 7 = 22$ idom van. Egy első féle átlón kívül 5 háromszög van (a lemetsett csúcsból kiinduló 6 egyenes között); a szélsők azonban a szomszédos első féle átlókhoz is hozzátartoznak, így a H és H_2 közötti idomok száma $7 \cdot 5 - 7 = 28$. Az összes idomok száma $22 + 28 = 50$.

Megjegyzések. 1. A megszámlálásokra több más lehetőség is van. Pl. a II. *b)* és *c)* részben a háromszög oldalegyeneseinek *irányát* – a II. *a)* rész szerint – 35-féleképpen választhatjuk, ez után a *helyzetüket* $2 - 2$, ill. $3 - 3$ -féleképpen, ezért $35 \cdot 2^3$, ill. $35 \cdot 3^3$ lehetőségre gondolunk. Így azonban egy ponton átmenő egyeneshármasokat is számításba vetünk. Ezek közös pontja mindig egy hétszögcsúcs. Egy csúcs 4 átlóegyenese közül a 3 egyenest 4-féleképpen, 6 összes egyenese közül pedig – a II. *a)* számláláshoz hasonló meggondolással – $6 \cdot 5 \cdot 4/6 = 20$ -féleképpen választhatjuk. Ezért az elfajulás $7 \cdot 4$, ill. $7 \cdot 20$ esetben áll be, a valóságos háromszögek száma $35 \cdot 2^3 - 7 \cdot 4 = 252$, ill. $35 \cdot 3^3 - 7 \cdot 20 = 805$.

2. Érdekes, hogy az egyenlő szárú háromszögek száma az *a)*, *b)*, *c)* esetek mindegyikében több, mint fele az összes háromszögeknek (az *a)* és *c)* esetekben pontosan 60 %-a).