

1. Nevezzük u -t, v -t az (u, v) számpár első, ill. 2-ik komponensének. Így a csillag művelet értelmezését így mondhatjuk ki: a rendezett I, II számpárra a csillag-műveletet alkalmazva az eredmény ismét számpár, első komponense I és II első komponensének szorzata, 2-ik komponense pedig összeg: az I-nek 2-ik és a II-nek első komponenséből képezett szorzatnak és II 2-ik komponensének összege. Az eredmény 2-ik komponense mutatja, hogy a csillag-művelet nem kommutatív, általában

$$(a, b)^*(a', b') \neq (a', b')^*(a, b).$$

A zárójelek, mint szokásos, több művelet előírása esetén a végrehajtás sorrendjét jelölik. Így (1) bal oldala

$$(aa', ba' + b')^*(a'', b'') = [aa'a'', (ba' + b')a'' + b''],$$

a jobb oldal pedig

$$(a, b)^*(a'a'', b'a'' + b'') = [aa'a'', ba'a'' + (b'a'' + b'')],$$

és ebből már látjuk, hogy a két oldal megfelelő komponensei egyenlők, tehát (1) helyes.

A bebizonyított állítás szerint a csillag-művelet asszociatív, vagyis ha csillag-művelet eredményével újabb csillagműveletet végzünk, a két csillagművelet végrehajtásának sorrendje felcserélhető (a számpárok sorrendje azonban nem!).

2. A kérdéses (x, y) számpárra

$$(a, b)^*(x, y) = (ax, bx + y) = (a, b)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$ax = a \quad \text{és} \quad bx + y = b,$$

vagyis ha $x = 1$ és $y = 0$ (feltéve, hogy $a \neq 0$), tehát a keresett számpár: $(1, 0)$.

Azt kell belátnunk, hogy így (2) jobb oldalán is (a, b) áll. Valóban, az értelmezés szerint

$$(1, 0)^*(a, b) = (1 \cdot a, 0 \cdot a + b) = (a, b).$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1. Az értelmezés szerint

$$(a, 0)^*(b, 0) = (ab, 0) \quad \text{és} \quad (1, a)^*(1, b) = (1, a + b).$$

A számpárokat a koordináta-rendszer ugyanúgy jelölt pontjaival ábrázolva és első, 2-ik komponens helyett abszcisszát, ordinátát mondva e két eredményt így mondhatjuk ki: 1. Ha a csillagműveletet (1): az X -tengelyen ábrázolt számpárra alkalmazzuk, az eredmény képe is az X tengelyen van, abszcisszája a két számpár abszcisszáinak szorzata; (2): az $x = 1$ egyenesen ábrázolt két számpárra alkalmazzuk, az eredmény képe is ugyanezen az egyenesen van, ordinátája a számpárok ordinátáinak összege. Az $(1, 0)$ számpárra mindkét speciális eredmény érvényes.

Általánosabban kérdezhetjük, mikor van megoldása az $(a, b)^*(x, y) = (c, d)$ „egyenletnek”, és ha van, akkor hány van. Az

$$ax = c, \quad bx + y = d$$

egyenletrendszerből $x = c/a$, $y = (ad - bc)/a$, hacsak a $a \neq 0$, ilyenkor a megoldás egyértelmű. $a = 0$ esetén csak akkor van megoldás, ha egyszersmind $c = 0$ is fennáll, ekkor bármely x megfelelő és hozzá y kiszámítható, tehát a megoldás nem egyértelmű.

Nagypál Botond (Orosháza, Tánicsics M. g. IV. o. t.)

2. Mivel a feladatban értelmezett művelet nem kommutatív, az utóbbi kérdés természetes kiegészítése az $(x, y)^*(a, b) = (c, d)$ egyenlet felvetése. Innen $x = c/a$, $y = (d - b)/a$, ha $a \neq 0$; ha pedig $a = 0$, akkor $c = 0$ és $d = b$ egyidejű fennállása esetén bármely (x, y) megoldás, máskor pedig nincs megoldás.