

I. megoldás: 1. A számhármak-párok összege és négyzetösszege valóban egyenlő: az I. párban 414, ill. 84 932 és hasonlóan II: 90 621 és 4 549 468 547; III: 909 és 414 041; IV: 520 és 149 432. Majdnem mindegyik összeadásban feltűnik, hogy az összeadandókban egy- és kéttagú számjegyegegyezések is vannak. Különösen szembeszökő ez a II. és III. párban, a közbülső 0-jegyek folytán. Vegyük észre, hogy az I. pár tagjai a 8, a 30 és $60 = 2 \cdot 30$, a 100 és $2 \cdot 100$ összeadandókból vannak felépítve, és 100, 30, 8 helyére rendre p , q , r -et téve így írhatók:

$$(1) \quad q + r, \quad p + r, \quad 2p + 2q + r; \quad r, \quad p + 2q + r, \quad 2p + q + r.$$

A hármakokon belüli cserékkel a II. számai is ilyen felépítésűek $p = 30\,000$, $q = 200$ és $r = 7$ -tel. (1)-ben máris általános képleteket kaptunk tetszés szerinti p , q , r paraméterekből ilyen tulajdonságú számhármak-párok előállítására. Ugyanis az alapok összege mindkét oldalon $3p + 3q + 3r$, a négyzetek összege pedig $5(p^2 + q^2) + 3r^2 + 6r(p + q) + 8pq$.

2. A III. és IV. példák nem követik ezt a szabályszerűséget. Ha ugyanis a III. bármelyik hármakának számait bármelyik sorrendben egyenlővé tesszük (1) valamelyik hármakának kifejezéseivel, és ebből kiszámíthatjuk p , q , r értékét, majd ezekkel (1) másik hármakának számait – sohasem III. másik hármakának számait kapjuk. Pl.

$$q + r = 4, \quad p + r = 500, \quad 2p + 2q + r = 405\text{-ből}$$

$p = 299$, $q = -197$, $r = 201$, és ezekkel V. $r = 201$, $p + 2q + r = 106$, $2p + q + r = 602$, ami egyik számban sem egyezik az 5, 400, 504 hármassal. Más példa:

$$r = 504, \quad p + 2q + r = 400, \quad 2p + q + r = 5\text{-ből}$$

$p = -298$, $q = 97$ és $r = 504$ -gyel

VI.

$$q + r = 601, \quad p + r = 206, \quad 2p + 2q + r = 102.$$

Vegyük azonban észre, hogy a III. és IV. pár mindegyik hármakának 3-ik tagja egyenlő a másik hármak első két tagja összegével, vagyis a következő képletcsoporthal írhatók le:

$$(2) \quad s, \quad t, \quad u + v; \quad u, \quad v, \quad s + t.$$

Itt a négyzetösszegek egyenlősége nyilván akkor és csak akkor áll fenn, ha (a paraméterek négyzetét mindjárt elhagyva) a kéttagúak négyzetéből adódó 2-szeres szorzatok egyenlők; egyszerűsítéssel:

$$(2a) \quad uv = st, \quad \text{vagyis pl} \quad v = st/u.$$

Eszerint lényegében itt is csak három paraméter van.

Mivel efféle vizsgálatokban természetes számokra szokás szorítkozni, azért célszerű a pozitív egész s , t számpár megválasztása után az st szorzat valamely osztóját venni u -nak, így v is egész, tehát (2) számhármakai egész számokból állnak, és összegeik, négyzetösszegeik egyenlők.

Krámlí András (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Találhatunk olyan szabályszerűséget is, amely I–IV-et egyaránt jellemzi. Cseréljük fel I-ben és II-ben a két hármak és rendezzük mindegyik hármak tagjait növekvő sorrendbe:

I. 8,	168,	238;	38,	108,	268;	$x = 30,$	$y = 30;$
II. 7,	30 407,	60 207;	207,	30 007,	60 407;	200,	200;
III. 4,	405,	500;	5,	400,	504	1,	4;
IV. 6,	164,	350;	14,	150,	356.	8,	6.

Így mind a négy pár a következő általános alakban írható:

$$(3) \quad a, \quad b + x + y, \quad c; \quad a + x, \quad b, \quad c + y,$$

ehhez x -et és y -t mindenütt feltüntettük. Az átrendezés alapja ez az észrevétel: mindegyik példa egyik hármakának legkisebb és legnagyobb tagja kisebb a másik hármak legkisebb, ill. legnagyobb tagjánál, és ezek a hiányok az alapok összegében a középső tagok révén egyenlődnének ki.

Az I. megoldáshoz hasonlóan a négyzetösszegek egyenlőségéhez szükséges és elegendő a következő feltétel:

$$(4) \quad bx + by + xy = ax + cy.$$

Nyilvánvaló, hogy ennek – még egész számokban is – végtelen sok megoldása van. Ehhez pl. az átrendezett

$$a = b + y + (b - c) \cdot \frac{y}{x}$$

alak szerint tetszés szerinti (pozitív egész) b , c , y mellett elegendő, hogy x (pozitív) osztója legyen y -nak, pl. lehet $x = 1$.

Ha nem kötjük ki x és y pozitív voltát, akkor minden egyenlő összegű hármaspár írható a (3) alakban, és a négyzetösszeg egyenlőségének szükséges és elégséges feltétele (4).

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az első két pár szabályszerűségeihez a bizonyos számsorozatok vizsgálatában használatos „különbségek vizsgálatának módszereivel” is eljuthatunk. Vegyük észre, hogy I-ben $108 - 38 = 238 - 168$, valamint $268 - 108 = 168 - 8$ (és hasonló áll fenn II-ben is). Már most a számhármasokat a_1, b_1, c_1 , ill. a_2, b_2, c_2 -vel jelölve a

$$\begin{aligned}b_1 - a_1 &= c_2 - b_2 = K \\c_1 - b_1 &= b_2 - a_2 = L \\a_1 + b_1 + c_1 &= a_2 + b_2 + c_2 = M\end{aligned}$$

egyenletrendszerből, ahol K, L, M -et paraméternek tekintjük, – külön-külön az 1-es, ill. 2-es indexű ismeretlenekre –

$$(5) \quad \begin{aligned}a_1 &= (-2K - L + M)/3, \quad b_1 = (K - L + M)/3, \quad c_1 = (K + 2L + M)/3; \\a_2 &= (-K - 2L + M)/3, \quad b_2 = (-K + L + M)/3, \quad c_2 = (2K + L + M)/3.\end{aligned}$$

Ezekkel a négyzetösszeg mindkét hármasban $(6K^2 + 6L^2 + 3M^2 + 6KL)/9$ -nek adódik, tehát a (5) képletrendszer megfelelő számhármas-párokat ad.

Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

2. III-ban viszont a hányadosok vizsgálata ad jó ötletet: a $b_1 : a_2 = 500 : 5 = 100$ és $b_2 : a_1 = 400 : 4 = 100$ arányok értéke egyenlő. (IV-ben hasonlóan két arány értékét 25-nek találjuk.) Ezzel tulajdonképpen más úton jutottunk el $(2a)$ -ra. Ezekből adódik a (2)-höz hasonló, de mellékfeltételhez nem kötött

$$(6) \quad kl, \quad mn, \quad kn + lm; \quad lm, \quad kn, \quad kl + mn$$

megoldás (szimmetrikus alak elérése végett a_1 -et és a_2 -t szorzat alakban vettük fel, a fenti arányt pedig n/l -nek).

3. Ha III-ban 4 és 5 helyett 004-et, ill. 005-öt írunk, akkor az egyik hármas számait hátulról előre kiolvasva a másik hármas számait kapjuk. Az érdeklődő olvasókra hagyjuk annak az érdekességnek a megmagyarázását, hogy ez a többször-tulajdonság a III. két hármasából képezett V. és VI. számhármasok egybekapcsolásával előálló párban is megvan.