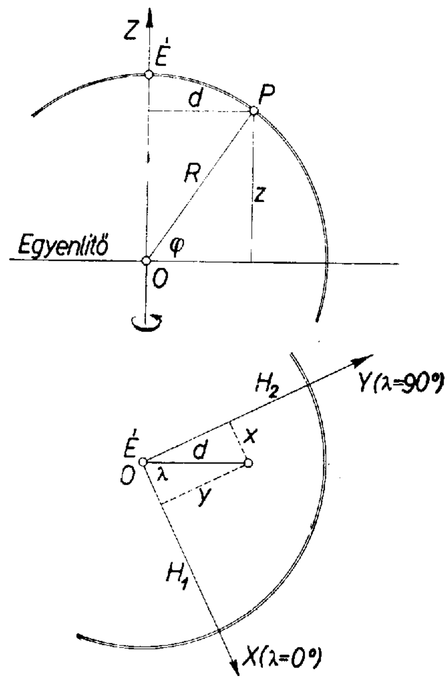
Megoldás: I. 1. A földfelszín egy P pontjának az Egyenlítő E síkjától, ill. a forgástengelytől való távolsága P hosszúsági körének síkjában az R sugárból és a φ szélességből $z = R\sin\varphi$, ill. $d = R\cos\varphi$ (1. ábra felső része).



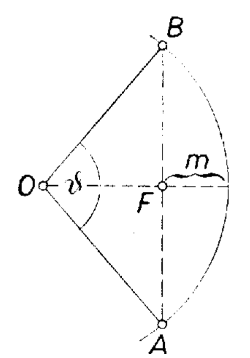
1. ábra

A Földet a szokásos állásban rajzolva és ennek megfelelően a déli szélességeket negatívnak véve z is előjellel értendő. B-re $z_1 = 4696$, $d_1 = 4304$; A-ra pedig $z_2 = 3233$, $d_2 = 5488$ (minden távolságot km-ben adunk meg, így sehol sem lépünk túl a 4-jegyű táblázatokkal elérhető pontosságon).

2. A 0°-os hosszúsági kör H_1 síkjától való távolság P szélességi körének síkjában az előbbi d-ből és a λ hosszúságból $y = d\sin\lambda$. (1. ábra alsó része). A nyugati hosszúságokat negatívnak véve, más szóval ha $-180^\circ < \lambda \le 180^\circ$, y is előjellel adódik. Hasonlóan a $\pm 90^\circ$-os délkörök H_2 síkjától való távolság $x = d\cos\lambda$. $-B$-re $y_1 = 1408$, $x_1 = 4066$; A-ra $y_2 = -915$, $x_2 = 5411$.

(A pontokat így tulajdonképpen egy az ábrázoló geometriából ismert, térbeli derékszögű koordinátarendszerben adtuk meg, ennek origója a Föld O középpontja, X-, Y-tengelye az Egyenlítő $\lambda = 0^\circ$, ill. $\lambda = +90^\circ$ hosszúságú pontján lép ki (Accrától, ill. Kalkuttától délre), Z-tengelye pedig az Északi–sarkon.

3. Eredményeinkből megkaphatjuk annak a T téglatestnek az a, b, c éleit, amelynek két csúcsa A és B, lapsíkjai pedig átmennek ezeken és párhuzamosak E, H_1, H_2-vel; az élekből pedig folytatólag a húron mért $AB = h$ távolságot, ugyanis AB a T-nek testátlója. Éspedig $a = x_2 - x_1 = 1345$, $b = y_1 - y_2 = 2323$, $c = z_1 - z_2 = 1463$, és így $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3057$ km.



2. ábra

4. A Föld felszínén a legrövidebb AB ívet az ABO sík metszi ki. A metszet főkör (2. ábra), így sugara R. Legyen $AOB\sphericalangle = \vartheta$, ekkor az AOB háromszögből a koszinusz tétellel

$$\cos\vartheta = 1 - h^2/2R^2.$$

Innen $\vartheta = 27{,}78^\circ$, ívmértékben 0,4848, és így a felszínen mérve $AB = R\vartheta = 3088$ km.

5. Az AB húr legmélyebben, vagyis O-hoz legközelebb fekvő pontja az F felezőpont, mélysége $m = R(1-\cos\vartheta/2) =$ 187 km.

II. A kívánt általános képletet a fentiek alapján adjuk meg, a ϑ szög kiszámítására. Ebből az ív egyszerűen megkapható. T éleinek hossza – esetleg ellentett előjellel, ez azonban a további négyzetreemelésre tekintettel nem lényeges:

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 = d_1\cos\lambda_1 - d_2\cos\lambda = R(\cos\varphi_1\cos\lambda_1 - \cos\varphi_2\cos\lambda_2),\\
&y_1 - y_2 = d_1\sin\lambda_1 - d_2\sin\lambda_2 = R(\cos\varphi_1\sin\lambda_1 - \cos\varphi_2\sin\lambda_2,),\\
&z_1 - z_2 = R(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2).
\end{aligned}$$

Ezekkel, mindjárt átcsoportosítva, majd ismert trigonometrikus azonosságok felhasználásával

$$\begin{aligned}
(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = R^2\big[\cos^2\varphi_1(\cos^2\lambda_1+\sin^2\lambda_1) + \cos^2\varphi_2(\cos^2\lambda_2 +\\
+\sin^2\lambda_2) - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2(\cos\lambda_1\cos\lambda_2 + \sin\lambda_1\sin\lambda_2)\big] =\\
= R^2\big[\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)\big],
\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}
&h^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = R^2\big[(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1)+\\
&+(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2) - 2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)\big] =\\
&= 2R^2\big[1 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)\big],
\end{aligned}$$

végül (1) alapján

$$\cos\vartheta = \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2).$$

Innen ϑ egyértelműen kiszámítható – ugyanis nyilván $0 < \vartheta \le 180°$.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

Megjegyzés. Általános eredményünk a gömbi trigonometria ún. oldal–koszinusz tételének az $ÉAB$ gömbháromszögre való alkalmazásával is megkapható, ahol $É$ az Északi–sark. Több dolgozat csak a végeredményre törekedve mindjárt ezt írta fel és ezt tekintette megoldásnak, ill. második megoldásnak. Itt a számpéldán felül annak beláttatása volt a cél, hogy a képlethez a gömbi trigonometria tételeinek rendszeres kiépítése nélkül is el lehet jutni.