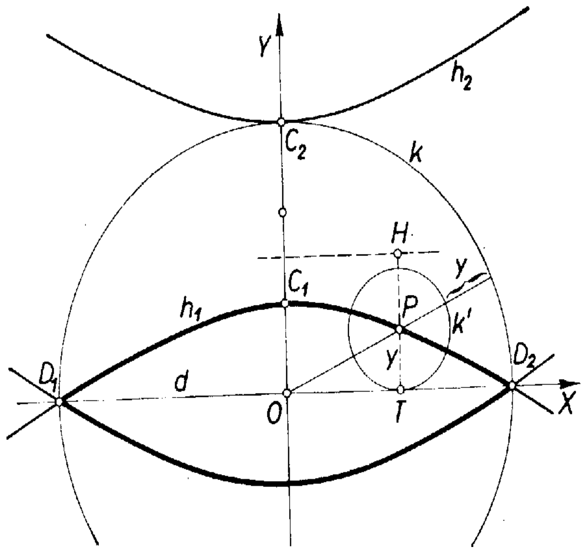
Helyezzünk az ábrára derékszögű koordinátarendszert, vegyük origónak k középpontját, X tengelynek a d átmérő egyenesét. Legyen egy a követelménynek megfelelő kör k', és ennek középpontja $P\,(x,\,y)$, továbbá k sugara r.



Nyilvánvaló, hogy k és k'-nek általában nincs közös pontja; mert ha van, akkor legrövidebb távolságuk és vele k' sugara 0, vagyis csak tágabb értelemben tekinthető körnek. Ilyenkor $k' \equiv P$, és ez a pont k-n is, d-n is rajta van, vagyis d-nek D_1, D_2 végpontjai tágabb értelemben a mértani helyhez tartoznak. – Minden más esetben k' és d (mint szakasz) érintkezési pontja, ami nyilván a $T(x,\,0)$ pont, a k belsejében van, és így egyrészt

(1) $$-r \leq x \leq r,$$

másrészt k magában foglalja k'-t, és így P-t is.

Szorítkozzunk egyelőre a mértani helynek az $y \geq 0$ félsíkon levő pontjaira. Ekkor k' sugara, egyben k és k' legközelebbi pontjainak távolsága y, P-nek k-tól való távolsága $2y$, és így $OP = r - 2y$. (Ez pozitív, mert k' nem foglalhatja magában O-t – különben ugyanis nem érinthetné d-t –, ezért k'-nek k-tól legtávolabbi pontja a k-nak ugyanazon a sugarán van, mint a k-hoz legközelebbi pontja, és így

$$r \geq 3y.$$

OP-t a koordinátákkal is kifejezve, és két kifejezését összekapcsolva

$$\sqrt{x^2+y^2} = r - 2y,$$

innen négyzetreemeléssel és további átalakítással

$$3y^2 - 4ry - x^2 + r^2 = 0$$

$$3\left(y - \frac{2r}{3}\right)^2 - x^2 = \frac{r^2}{3},$$

végül

$$\frac{\left(y-\dfrac{2r}{3}\right)^2}{\left(\dfrac{r}{3}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

Ezek szerint minden (az $y \geq 0$ félsíkon fekvő) P rajta van azon a hiperbolán, melynek középpontja a $(0,\,2r/3)$ pont, valós tengelye az Y tengely, fő-, ill. melléktengelyének félhossza $r/3$, ill. $r/\sqrt{3}$, és így csúcsai a $C_1\,(0,\,r/3)$ és a $C_2\,(0,\,r)$ pontok.

Fordítva e hiperbolának nem minden pontja tartozik hozzá a keresett mértani helyhez. A C_2-t tartalmazó h_2 ágnak nincs pontja k belsejében, mert az ág legkisebb ordinátájú pontja C_2, és ez éppen k-nak legnagyobb ordinátájú pontja; – tehát h_2 pontjai nem tartoznak a mértani helyhez.

A C_1-et tartalmazó h_1 ág az X-tengelyt, mint az $y \geq 0$ félsík határvonalát az $x = \pm\, r$ abszcisszájú pontokban, D_1, D_2-ben metszi. Már most a h_1 ág $D_1C_1D_2$ ívének pontjai a k kör egyik félkörében vannak, rájuk az (1), az $y \geq 0$ és a (2) feltételek mindegyike teljesül; h_1 további pontjaira viszont nem.

Mindezek szerint a keresett mértani helyet a $D_1C_1D_2$ hiperbolaív és ennek az X-tengelyre vett tükörképe alkotja.

Ha azokat a P-pontokat is elfogadjuk, amelyekkel k' a d szakasz meghosszabbításait érinti, akkor a h_1 ág minden pontja a mértani helyhez tartozik. Ezekre ugyanis $y < 0$, így k' sugara $|y| = -y$, és mivel ekkor k' kívül van k-n, azért $OP = r + 2|y| = r - 2y$, vagyis teljesül a fenti követelmény. – Viszont a h_2 ágon azok a pontok vannak, amelyekre $OP = -(r - 2y) = 2y - r$, azaz $OP + r = 2y$, vagyis amelyekre nézve k-nak k'-től legtávolabbi pontja annyira van k'-től, mint k' sugara.

Nagy Dezső (Budapest, Piarista g. III. o. t.)

Megjegyzés. Akik ismerik a hiperbolának ún. irányvonalas tulajdonságát, azok a 623. gyakorlat III. megoldásából[1] adódó $CC_1/HC_1 = 2$ megállapítás alapján is kimondhatják, hogy a mértani hely pontjai a fenti hiperbolán vannak. Könnyen meg lehet mutatni ugyanis, hogy az $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ hiperbola minden pontjára az $F_1(c,\,0)$ fókusztól (ahol $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), és az $x = a^2/c$ ún. irányvonaltól való távolságok aránya állandó, és értéke c/a, az ún. numerikus excentricitás, 1-nél nagyobb szám. (Ugyanez áll az $F_2(-c,\,0)$ és $x = -a^2/c$-től mért távolságokra.) Eszerint a szóban forgó hiperbola egyik fókusza a k kör középpontja, irányvonala a d-re merőleges sugár felező merőlegese és numerikus excentricitása 2.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

[1] Lásd K. M. L. 22 (1961) 17. o.