

Emeljük ki a kéttagú tényezőkből x együtthatóját:

$$(2) \quad 2 \cdot 3 \cdot 6(x-1) \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{4}{3}\right) \left(x - \frac{5}{6}\right) = a,$$

és vegyük észre, hogy az első és a harmadik tényező összege egyenlő a második és a negyedik tényező összegével:

$$(x-1) + \left(x - \frac{4}{3}\right) = 2x - \frac{7}{3} = \left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(x - \frac{5}{6}\right).$$

Ennek alapján új ismeretlennek ezen összeg felét:

$$z = x - \frac{7}{6}$$

-ot véve feladatunkat megkönnyíthetjük. Ekkor $x = z + 7/6$, és egyenletünk így alakul:

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{6}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{6}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right) &= \left(z^2 - \frac{1}{36}\right) \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) = \frac{a}{36}, \\ z^4 - \frac{5}{36}z^2 + \frac{1}{324} - \frac{a}{36} &= 0. \end{aligned}$$

Innen z^2 -re két értéket kapunk – hacsak a diszkrimináns pozitív –

$$z^2 = \frac{5 \pm \sqrt{9 + 144a}}{72},$$

ezekből pedig négyzetgyökvonással z -re két-két gyököt, hacsak z^2 értékei nem negatívak. Végül x -et a fenti helyettesítés alapján számíthatjuk ki.

Az első számpéldában $a = 14$, $z^2 = 25/36$ és $z^2 = -5/9$. Valós z -t csak az előbbiből kapunk: $z = \pm 5/6$, és így $x_1 = 2$, $x_2 = 1/3$.

$a = 0,1$ -ből (négy tizedes jegynyi pontossággal) $z^2 \approx 0,1366$, és $z^2 \approx 0,0022$, innen $z_{1,2} = \pm 0,370$ és $z_{3,4} = \pm 0,047$, végül $x_1 = 1,536$, $x_2 = 0,796$; $x_3 = 1,21$, $x_4 \approx 1,12$. Négy valós gyököt kapunk.

Végül $a = -0,0544$ -ből hasonlóan $z^2 \approx 0,0844$, $0,0544$, $z \approx \pm 0,291$, $\pm 0,233$, végül $x_1 \approx 1,458$, $x_2 \approx 0,876$, $x_3 \approx 1,4$, $x_4 \approx 0,933 = 14/15$, mind a négy gyök valós.

Bornes Klára (Budapest, Teleki Blanka lg. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldás alapjául szolgáló észrevétel ugyanaz, mint az 1960. évi Arany Dániel verseny, haladók versenye döntő fordulójának 3. feladatában.¹ Ennek megfelelően az egyenlet a versenyfeladat II. megoldásában alkalmazott helyettesítéssel is megoldható.

2. Vizsgáljuk meg az (1)-ből beszorzással és 0-ra redukálással adódó

$$36x^4 - 168x^3 + 289x^2 - 217x + 60 - a = 0$$

egyenletet a 656. feladatban² talált eredmény alapján. Ott azt nyertük, hogy az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom akkor és csak akkor írható $z^4 + Az^2 + B$ alakban, ha az együtthatókra teljesül $a^3 - 4ab + 8c = 0$; továbbá e feltétel teljesülése esetén a polinomot a második alakba az $x = z - a/4$ helyettesítés viszi át. Esetünkben a , b , c helyén rendre

$$-\frac{168}{36} = -\frac{14}{3}, \quad \frac{289}{36}, \quad -\frac{217}{36}$$

áll, ezekkel az idézett feltétel teljesül, helyettesítésnek pedig a fent is használt $x = z + 7/6$ adódik.

Egyszerűbb lett volna a számítás, ha előbb az $x - 1 = w$ helyettesítést alkalmazzuk. Evvel a

$$w(2w - 1)(3w - 1)(6w + 1) - a = 36w^4 - 24w^3 - w^2 + w - a = 0$$

egyenletre jutottunk volna, kisebb együtthatókkal. Ezt a (2) alak alapján abból lehet sejteni, hogy mind a négy tényezőben az állandó kivonandó értéke 1 körül van.

¹L. a megoldást K. M. L. 22 (1961) 5. o.

²K. M. L. 11 (1955) 57. o.