

I. megoldás: A PF_1F_2 háromszög F_1F_2 oldala állandó – a szokásos jelöléssel $2c$ –, PF_1 és PF_2 pedig a P pont két vezérsugara: r_1 , r_2 , amelyekre $r_1 + r_2 = 2a$. Így a háromszög kerülete $2(a + c)$, tehát a félszög tangensének az oldalakkal való kifejezéseivel

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{\frac{(a + c - 2c)(a + c - r_1)}{(a + c)(a + c - r_2)}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{\frac{(a + c - 2c)(a + c - r_2)}{(a + c)(a + c - r_1)}},$$

így pedig szoroztuk

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a - c}{a + c}, \quad \text{állandó.}$$

Csizy László (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük adottnak az ellipszist az

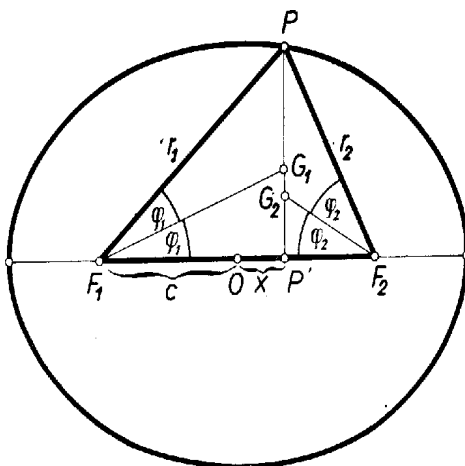
$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenlettel, ahol az $a^2 > b^2$. Így a fókuszok koordinátái: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, ahol

$$(2) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Az ellipszis szimmetriája alapján elég az állítást az olyan $P(x, y)$ pontra belátnunk, melynek egyik koordinátája sem negatív: $x \geq 0$ és $y > 0$ ($y = 0$ lehetőségét a feladat kizárta).

Legyen P két vezérsugara $PF_1 = r_1$ és $PF_2 = r_2$, P vetülete az X -tengelyre P' , és messe a $2\varphi_1$, $2\varphi_2$ szög felezője PP' -t G_1 , G_2 -ben.



Ekkor

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{P'G_1}{F_1P'} = \frac{P'G_1}{c + x},$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{P'G_2}{F_2P'} = \frac{P'G_2}{c - x}.$$

Alkalmazzuk a szögfelező osztási arányára vonatkozó tételt az $F_1P'P$ és $F_2P'P$ háromszögre:

$$\frac{G_1P}{P'G_1} = \frac{F_1P}{F_1P'} \quad \text{és} \quad \frac{G_2P}{P'G_2} = \frac{F_2P}{F_2P'},$$

azaz

$$\frac{y - P'G_1}{P'G_1} = \frac{r_1}{c + x} \quad \text{és} \quad \frac{y - P'G_2}{P'G_2} = \frac{r_2}{c - x}.$$

Mindkét oldalhoz 1-et adva, majd a két tört egyenlőségének formájában írt aránypár belső tagjait felcserélve, végül (3)-at, (4)-et figyelembe véve

$$(5) \quad \frac{y}{P'G_1} = \frac{c + x + r_1}{c + x} \quad \text{és} \quad \frac{y}{P'G_2} = \frac{c - x + r_2}{c - x},$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y}{c + x + r_1},$$

$$(6) \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y}{c - x + r_2}.$$

A $PP'F_1$ derékszögű háromszögből (1) és (2) figyelembevételével

$$r_1^2 = (c+x)^2 + y^2 = (a^2 - b^2) + 2cx + x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}\right) = a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2},$$

és így (mivel $x \geq 0$)

$$r_1 = a + \frac{cx}{a}.$$

Hasonlóan a $PP'F_2$ háromszögből ($0 \leq x < a$ és $c < a$ folytán)

$$r_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

Ezekkel (5) és (6) nevezője így írható:

$$\begin{aligned} c+x+r_1 &= c+x+a+\frac{cx}{a} = a+c+\frac{x}{a}(a+c) = (a+c)\left(1+\frac{x}{a}\right), \\ c-x+r_2 &= c-x+a-\frac{cx}{a} = (a+c)\left(1-\frac{x}{a}\right), \end{aligned}$$

tehát a kérdéses szorzat

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{y}{(a+c)\left(1+\frac{x}{a}\right)} \cdot \frac{y}{(a+c)\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{y^2}{(a+c)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \frac{y^2}{(a+c)^2 \frac{y^2}{b^2}} = \frac{b^2}{(a+c)^2} = \frac{a^2 - c^2}{(a+c)^2} = \frac{a-c}{a+c}, \quad \text{állandó.} \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Meggondolásunk $x > c$ esetén is érvényes, hacsak $P'G_2$ -t előjellel együtt értjük. Így $2\varphi_2 > 90^\circ$ és F_2G_2 az $F_2P'P$ háromszögben külső szögfelező, azonban a felhasznált tétel a külső szögfelezőre is érvényes.

Nem érvényes viszont vizsgálatunk az $x = c$ esetre, mert ekkor $P' \equiv F_2$ és az $F_2P'P$ háromszög nem létezik. Ekkor $\operatorname{tg} \varphi_1$ értéke éppen a fent nyert állandó:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y}{(a+c)\left(1+\frac{c}{a}\right)} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}}{\frac{(a+c)^2}{a}} = \frac{b^2}{(a+c)^2},$$

másrészt $2\varphi_2 = 90^\circ$, ezért $\operatorname{tg} \varphi_2 = 1$, tehát a szorzat értéke ugyanannyi, mint minden más esetben.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás nem terjeszthető ki arra az esetre, ha P a nagytengely valamelyik végpontjában van, mert ekkor a PF_1F_2 háromszög úgy fajul el, hogy φ_1 és φ_2 egyike 90° , és ezért a szorzatnak nincs értelme. – Nincs értelme az állításnak körre sem, mert ott F_1 és F_2 egybeesnek, φ_1, φ_2 határozatlanok.