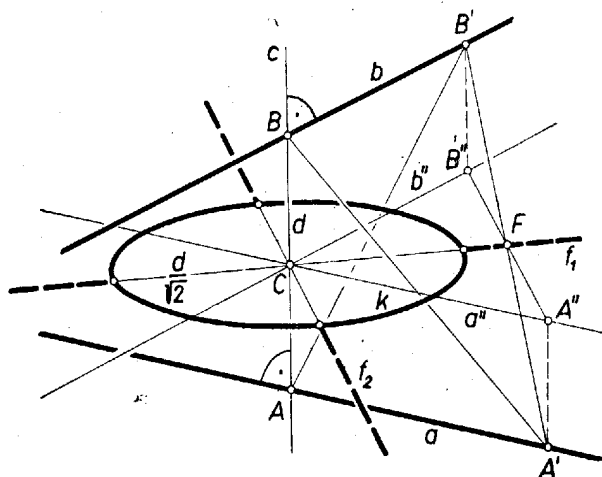


I. megoldás: 1. A kérdéses G gömb középpontja az $A'B'$ szakasz F felezőpontja, sugara pedig FA' . Elegendő megmutatnunk, hogy az $A'B'A$ háromszögben az A csúcsnál derékszög van. Ebből ugyanis már következik, hogy az $A'B'A$ síkban az $A'B'$ szakasz mint átmérő fölé írt Thalész-kör átmegy A -n, vagyis hogy A -nak F -től mért távolsága egyenlő FA' -vel, tehát A rajta van G -n.



Valóban, az $AA' = a$ egyenes merőleges AB' -re, mert a feltevés szerint a merőleges az ABB' síknak egymással nem párhuzamos b és c egyenesére, ezért a merőleges e síkra, ennek minden egyenesére, köztük AB' -re. Ezt akartuk bizonyítani. – Ugyanígy látható be, hogy az $A'B'B$ háromszögben B -nél derékszög van, tehát B is rajta van G -n.

2. Ezek szerint A és B egyenlő távolságra vannak F -től, más szóval minden szóba jövő F pont egyenlő távolságra van A és B -től, vagyis benne van az AB szakasz φ felező merőleges síkjában. Így φ merőleges c -re, ezért párhuzamos a és b -vel. Messe φ a c -t C -ben – vagyis $AC = CB$ –, és legyen A' és B' (merőleges) vetülete φ -n A'' , B'' , ekkor a , b vetülete φ -n a $CA'' = a''$, $CB'' = b''$ egyenes, $a'' \parallel a$, $b'' \parallel b$, tehát a feltevés f olytán $a'' \perp b''$, továbbá $CA'' = AA' = BB' = CB''$, tehát $A''B''C$ egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. F felezi az $A''B''$ szakaszt, mert az $FA'A''$ és $FB'B''$ derékszögű háromszögek egybevágók – átfogóik egyenlők, és egy-egy hegyesszögük váltószög –, tehát CF az $A''B''C$ háromszög súlyvonala és egyben a C -nél levő szög felezője. Ezek szerint F minden esetben rajta van az a'' , b'' egyenesek közti valamelyik szög f felezőjén. Végül mivel e háromszögben $CF = CA''/\sqrt{2} = AA'/\sqrt{2}$, és $AA' > d$, azért $CF > d/\sqrt{2}$, tehát F kívül esik a C körül φ -ben $d/\sqrt{2}$ sugárral írt k körön.

Fordítva nyilvánvaló, hogy bármely ezen feltételeknek megfelelő F^* ponton át CF^* -ra merőlegesen állított sík a'' , b'' , a , b -ből olyan A'' , B'' , A' , B' pontot metszi ki, amelyre $AA' = CA'' = CB'' = BB' > d$, tehát minden ilyen F^* beletartozik a mértani helybe. Így a keresett mértani helyet az a'' , b'' egyenespár két szögfelezőjének a k -n kívüli pontjai alkotják. (A k -val való metszéspontok, a négy félegyenes végpontjai, nem tartoznak a mértani helyhez. Egyébként a bizonyításban az $AA' > d$ megszorítást nem használtuk fel. Ezt mellőzve a mértani helyet a két szögfelező összes pontjai alkotják.)

Bencsik István (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás (a feladat első részére): Az $A'A$, AB és BB' egymás után kapcsolódó szakaszok páronként merőlegesek egymásra, ezért tekinthetők egy T téglatest három élének; T két lapsíkját az a , c , ill. c , b metsző egyenespár határozza meg, további két lapsíkjá ezekkel párhuzamos és átmegy B' -n, ill. A' -n, a hátralevő kettő pedig c -re merőleges és átmegy A -n, ill. B -n. ($AA' = BB'$ folytán T ún. négyzetes oszlop.) – Ismeretes, hogy minden téglatest átlói egyenlők és páronként felezik egymást, tehát a téglatest köré gömb írható (olyan gömb, mely átmegy a test valamennyi csúcsán). – Most már a bizonyítandó állítás abból következik, hogy az $A'B'$ szakasz T egyik testátlója.

Hanyi Zsolt (Szombathely, Nagy Lajos g. III. o. t.)

Megjegyzés. Többen az alakzatot az ábrázoló geometriából ismert térbeli derékszögű koordináta-rendszerben helyezték el, az állítást ebben végzett számítással bizonyították és a mértani helyet is egyenletrendszerével adták meg.