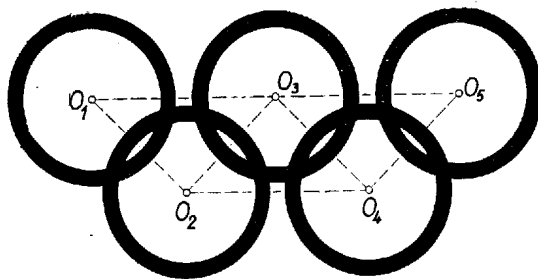


Az adott elrendezésben a „szomszédos” gyűrűk átfedik egymást, vagyis azok, melyeknek középpontjai az említett egyenlő szárú derékszögű háromszögek egy-egy befogójának végpontjai (1. ábra).

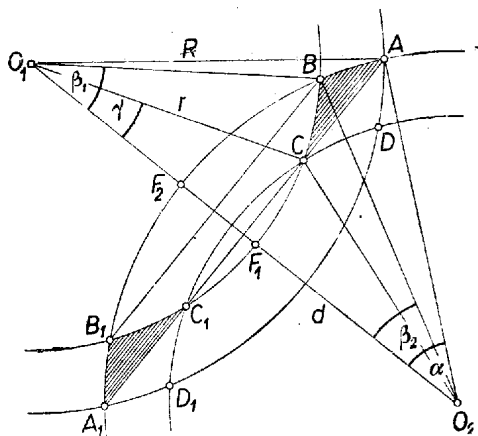


1. ábra

Éspedig szomszédos gyűrűk külső és belső határoló körei közül bármelyik kettő metszi egymást, mert középpontjaik távolsága $d = 24/\sqrt{2} = 12\sqrt{2} < 17$ – ugyanis négyzeteikre $288 < 289$, és ez kisebb a belső sugarak $9 + 9 = 18$ összegénél, másrészt nagyobb a külső és a belső sugár különbségénél, 2-nél. – Ezzel szemben két olyan gyűrűnek, melyek középpontja egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának két végpontja, nincs közös része, mert még a külső határoló körök sugarának $11 + 11 = 22$ összege is kisebb az átfogónál.

Bármelyik két szomszédos gyűrűnek két közösen átfedett része van, a szomszédos gyűrű párok száma 4, így a kétszer átfedett részek száma a jelvényben 8, nyilvánvalóan valamennyi egybevágó. Egy közös rész területét t_2 -vel, egy gyűrűt pedig t_1 -gyel jelölve az 5 gyűrű által lefedett terület $5t_1 - 8t_2$, mert az $5t_1$ tagban mindegyik közös részt 2-szer számítottuk be.

Legyen a gyűrűk határoló köreinek sugara R és r , ahol $R > r$. Így $t_1 = (R^2 - r^2)\pi$.



2. ábra

Legyen két szomszédos gyűrű középpontja O_1, O_2 (2. ábra), és egyik közös részük az $ABCD$ görbevonalú négyszög, ahol A a két nagyobb és C a két kisebb kör metszéspontja – ezek O_1O_2 felező merőlegesének pontjai –, B pedig az O_1 -höz közelebbi csúcs, legyen továbbá $ABCD$ tükörképe O_1O_2 -re – e két gyűrű másik közös része $-A_1B_1C_1D_1$. A szimmetria folytán a közös rész területe egyenlő az ABC és $A_1B_1C_1$ vegyes határvonalú háromszögek területének összegével. Ezt megkaphatjuk pl. Az ABB_1A_1 és BCC_1B_1 vegyes vonalú négyszögek (görbeszárú trapézok területének különbségeként, végül az utóbbiak mindegyike két körszelet területének különbsége. Éspedig – ha az O_1 középpontú CC_1 ív és az O_2 középpontú AA_1 ív felezőpontja F_1 , ill. F_2 , továbbá az idomok területét ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat –

$$\begin{aligned} t_2 &= ABC + A_1B_1C_1 = ABB_1A_1 - BCC_1B_1 = \\ &= (AF_2A_1 - BF_2B_1) - (BF_1B_1 - CF_1C_1). \end{aligned}$$

Az egymás utáni körszeletek $\alpha, \beta_2, \beta_1, \gamma$ fél nyílásszöge az O_1O_2A, O_1O_2B , ill. O_1O_2C háromszögből a

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{d}{2R}, & \cos \beta_2 &= \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2dR}, \\ \cos \beta_1 &= \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2dr}, & \cos \gamma &= \frac{d}{2r} \end{aligned}$$

összefüggésekkel kiszámítható, ezekből pedig a körszelet $t = \varrho^2(\varphi - \sin \varphi)/2$ területképletével (ahol ϱ a sugár, φ a teljes nyílásszög ívmértékben):

$$t_2 = \frac{R^2}{2} [(2a - \sin 2a) - (2\beta_2 - \sin 2\beta_2)] - \frac{r^2}{2} [(2\beta_1 - \sin 2\beta_1) - (2\gamma - \sin 2\gamma)].$$

A szám adatokkal $t_1 = 40\pi$;

$$\alpha \approx 39,52^\circ \approx 0,6898,$$

$$\beta \approx 28,54^\circ \approx 0,4980,$$

$$\beta_1 \approx 35,72^\circ \approx 0,6235;$$

$$\gamma \approx 19,47^\circ \approx 0,3397,$$

így $t_2 \approx 4,54 \text{ cm}^2$; végül a keresett terület $592,0 \text{ cm}^2$.

Meleghegyi László (Pécs, Nagy Lajos Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. t_2 értékére tájékoztató becslést kapunk az $ABCD$ deltoid területéből. A Pythagorász-tétel szerint $AA_1 = 14 \text{ cm}$, $CC_1 = 6 \text{ cm}$, így $AC = 4 \text{ cm}$, másrészt O_1B -nek O_1O_2 -n levő $31\sqrt{2}/6$ hosszúságú vetületéből $BD = 5\sqrt{2}/3$, így a deltoid területe $10\sqrt{2}/3 \approx 4,7 \text{ cm}^2$. – Másképpen, $ABCD$ -t két irányban $R - r = 2 \text{ cm}$ magasságú paralelogrammával helyettesítve az adódik, hogy területe legalább $(R - r)^2 = 4 \text{ cm}^2$.

Tattay Emőke (Budapest, Kaffka Margit lg. III. o. t.)