

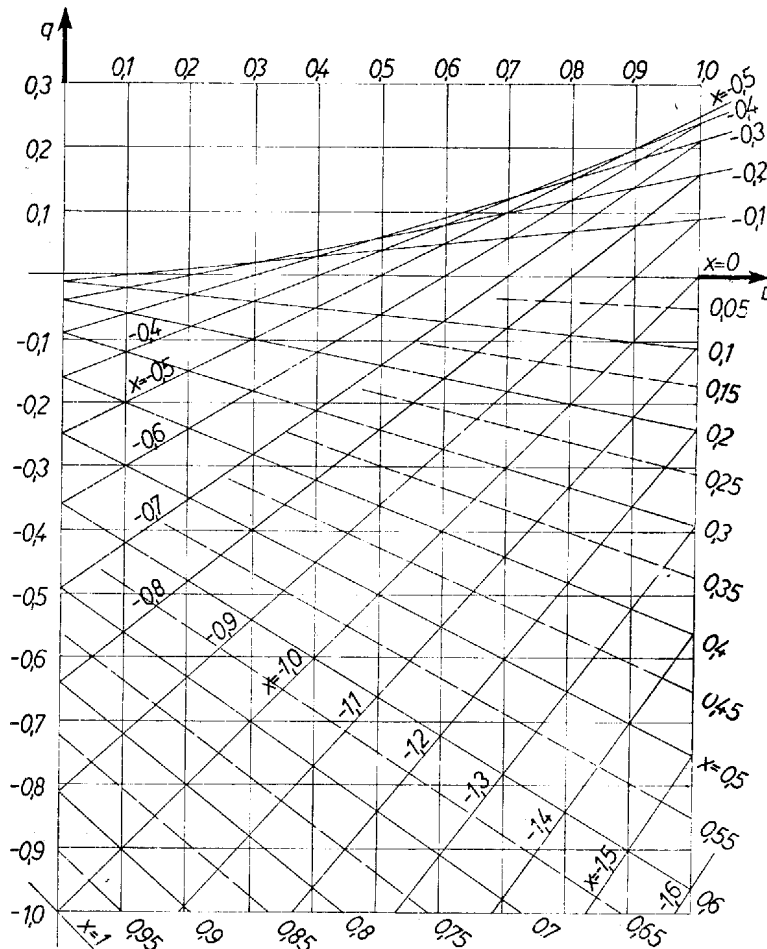
Az, hogy az x_0 (valós) szám gyöke a p, q együtthatókhoz tartozó, a feladatban szereplő alakú egyenletnek, azt jelenti, hogy teljesül

$$(1) \quad x_0^2 + px_0 + q = 0.$$

Ha az egyes egyenleteket egy derékszögű koordináta-rendszerben a (p, q) ponttal ábrázoljuk, akkor – az (1) egyenletben p -t és q -t változónak tekintve – mindazokat az egyenleteket képviselő pontok, amely egyenleteknek az x_0 gyöke, egy egyenest, a

$$q = -x_0 p - x_0^2$$

egyenlettel jellemzett e egyenest alkotják. Elvben az összes (x_0 minden valós értékehez tartozó) e egyenesek alkotják a szóban forgó nomogramot. Egy (p_0, q_0) ponton azon x értékekhez tartozó egyenesek mennek át, amely x értékek kielégítik a (p_0, q_0) ponttal ábrázolt egyenletet. Gyakorlatban korlátozzuk a (p, q) pontokat a sík egy véges részére a várható szükségletnek megfelelően (a gyakorlati alkalmazásokban ugyanis rendszerint csak bizonyos korlátok közötti (p, q) együtthatókra kell felkészülnünk); továbbá csak kiválogatott x értékekhez tartozó egyenesek egy-egy szakaszát rajzoljuk meg úgy, hogy az egyenesek biztosan követhetők legyenek addig, ahol mellettük a megfelelő p, q, x érték félreérthetetlenül feltüntethető. Célszerű továbbá olyan utasítást adni – amennyiben ez lehetséges –, amelynek alapján a nomogram használhatósági tartománya kiterjeszthető.



A sík $p < 0$ felsíkján mellőzhetjük a nomogram elkészítését, mert $p < 0$ esetén a $g(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ gyökei az $f(x) \equiv x^2 - px + q = 0$ gyökeiből (-1) -gyel való szorzás útján megkaphatók. Ugyanis $g(-x) \equiv f(x)$, tehát ha valamely x_1 -re $f(x_1) = 0$, akkor $g(-x_1) = 0$.

Az ábrán a sík p, q -koordináta-rendszerének csak a $0 \leq p \leq 1$, $-1 \leq q \leq 0,25$ téglalapját tüntettük fel, és ezen az x szám $0,1$ n értékeihez tartozó e egyeneseket, ahol n egész szám. Téglalapunkon csak a $-16 \leq n \leq 10$ értékekhez tartozó egyeneseknek van pontjuk.

A nomogram használata általában egyezik a 963. feladatban látott nomograméval. Pl. az $x^2 + 0,5x - 0,36 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = -0,9$ és $x_2 = 0,4$, mert a $(0,5; -0,36)$ ponton két egyenes megy át és azokon az $x = -0,9$ és $x = 0,4$ paraméter-érték van feltüntetve. Ha a (p, q) pont „közéleben” nem fekszik e egyenes, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke. Ha a pont az ábra „üres” és behálózott részének határán van, akkor vagy két egyenlő, vagy két majdnem egyenlő valós gyök van, vagy pedig olyan konjugált komplex gyökpár, amelyben a képzetes rész „kicsi”.

Ha $|p|$ és q egyike vagy mindketteje kívül esik a figyelembe vett, fenti korlátokon, akkor keressük meg a legkisebb olyan pozitív egész α , ill. 2β kitevőt, amelyre már teljesül

$$\frac{|p|}{10^\alpha} \leq 1, \quad \text{ill.} \quad -1 \leq \frac{q}{10^{2\beta}} \leq 0,25,$$

majd α és β nagyobbikát γ -val jelölve alkalmazzuk az $x^2 + px + q = 0$ egyenletre az $x = 10^\gamma z$ helyettesítést. Így z -re teljesülnie kell a

$$10^{2\gamma} z^2 + 10^\gamma p z + q = 0, \quad \text{azaz} \quad z^2 + \frac{p}{10^\gamma} z + \frac{q}{10^{2\gamma}} = 0$$

egyenletnek, az utóbbi egyenlet gyökei pedig ábránkról leolvashatók, mert

$$\left| \frac{p}{10^\gamma} \right| = \frac{|p|}{10^\gamma} \leq \frac{|p|}{10^\alpha} \quad \text{és} \quad \left| \frac{q}{10^{2\gamma}} \right| \leq \frac{|q|}{10^{2\beta}}.$$

Pl. az $x^2 - 25x - 99,9 = 0$ egyenlet esetében $\alpha = 2$ és $\beta = 1$, mert $25/10^2 = 0,25 \leq 1$ és $-1 \leq -99,9/10^2 \leq 0,25$, ennél fogva $\gamma = 2$, és $x = -10^2 z$ -vel $z^2 + 0,25 z - 0,00999 = 0$ -hez leolvasható $z_1 \approx 0,03$ és $z_2 \approx -0,28$, tehát $x_1 \approx -3$, $x_2 \approx +28$ (Számítással $x_1 \approx -3,504 \dots$ és $x_2 \approx -28,504 \dots$ adódik.)

Hasonlóan, ha p és q abszolút értékben közel járnak 0-hoz és a legnagyobb olyan pozitív egész δ , ε , amellyel még fennáll

$$10^\delta |p| \leq 1, \quad \text{ill.} \quad -1 \leq 10^{2\varepsilon} q \leq 0,25,$$

akkor δ és ε kisebbikét η -val jelölve $x = z/10^\eta$ helyettesítéssel olyan egyenletet kapunk, amelynek gyökei a nomogramról pontosabban olvashatók le, mint az eredeti egyenletéi, mert így várható, hogy a (p, q) pont körül a „szomszédos” e egyenesek távolsága nagyobb.

$x = kz$ alakú helyettesítést természetesen 10^γ és $1/10^\eta$ helyett más k -val is alkalmazhatunk, pl. a $k = 2, 1/2, 5, 1/5$ értékekkel a fellépő mellékszámítások könnyűek.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

Megjegyzés. Nomogramunkat fordítva az $x_1 x_2 = q$ szorzat és az $x_1 + x_2 = -p$ összeg leolvasására is lehet használni.