Tájékozódásul táblázatban összeállítjuk az $n=2,3,4,\ldots,12$ számok összes osztóit és ezek alapján osztóik számát. Várható, hogy így szabályszerűségeket ismerünk fel, és azokat felhasználva válaszolhatunk a kérdésekre.

| $n$ | osztók | $\tau$ | $n$ | osztók | $\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $1,2$ | 2 | 8 | $1,2,4,8$ | 4 |
| 3 | $1,3$ | 2 | 9 | $1,3,9$ | 3 |
| 4 | $1,2,4$ | 3 | 10 | $1,2,5,10$ | 4 |
| 5 | $1,5$ | 2 | 11 | $1,11$ | 2 |
| 6 | $1,\ 2,3,6$ | 4 | 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | 6 |
| 7 | $1,7$ | 2 | | | |

Itt $\tau$-ra négyféle érték fordult elő: $\tau=2$ adódott $n=2$, 3, 5, 7, 11 esetében – vagyis a megvizsgált törzsszámokra megegyezésben azzal, hogy törzsszámnak azokat a (természetes) számokat nevezzük, amelyeknek 1-en és önmagán kívül nincs más osztója, vagyis amelyek osztóinak száma $\tau=2$. Eszerint $\tau=2$-re a keresett szám a legkisebb törzsszám: $N_2=2$.

$\tau=3$ adódott $n=4$ és $n=9$ esetében; e két szám $p^2$ alakban írható, $p=2$-vel, ill. $p=3$-mal. Nyilvánvaló, hogy minden $p$ törzsszám négyzetére $\tau=3$, mert $p^2$ osztói csak az 1, $p$, $p^2$ számok. Hasonlóan, $n=8=2^3$-re $\tau=4$, és bármely $p$ törzsszám köbének 4 osztója van: 1, $p$, $p^2$, $p^3$. Általában $p^k$ osztói: 1, $p$, $p^2$, $p^3$, …, $p^{k-1}$, $p^k$ és számuk $\tau=k+1$.

$\tau=4$ adódott továbbá $n=6=2\cdot 3$ és $n=10=2\cdot 5$ esetében is. Ezek osztóit táblázatokba rendezve látjuk, hogy a második sorbeli osztók az első sorbelieknek

$$n=6:1\quad \begin{array}{cc} 1, & 2\\ 3 & 6\end{array}\qquad n=10:\quad \begin{array}{cc} 1, & 2\\ 5 & 10\end{array}$$

3-, ill. 5-szörösei; vagy az oszlopokat nézve: a 2-ik oszlopban az első oszlopbeli osztók 2-szerese áll. Nyilvánvaló, hogy minden, két különböző törzsszám szorzataként írható $n=p_1p_2$ alakú számnak ugyancsak 4 osztója van:

$$\begin{array}{cc} 1 & p_1\\ p_2 & p_1p_2. \end{array}$$

Hasonlóan rendezhetjük el $12=4\cdot 3=2^2\cdot 3$ osztóit, valamint tájékozódásunkat a $36=3\cdot 12$ számra kiterjesztve – a 12 osztói mellé csatlakozó 9, 18 és 36 osztókat:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 4=2^2\\ 3, & 6=2\cdot 3, & 12=2^2\cdot 3,\end{array}\right\}12\text{ osztói}\\ \begin{array}{ccc}\overline{\ 9\ }=\overline{3^2}, & \overline{\ 18\ }=\overline{2\cdot 3^2}, & \overline{\ 36\ }=\overline{2^2\cdot 3^2}\end{array}\end{array}\right\}36\text{ osztói}$$

Általában egy $p_1^{k_1}\ p_2^{k_2}$ alakú szám osztói a következők:

$$\begin{array}{ccccc}
1, & p_1, & p_1^2, & \ldots, & p_1^{k_1},\\
p_2, & p_1p_2, & p_1^2p_2, & \ldots, & p_1^{k_1}\cdot p_2,\\
p_2^2, & p_1p_2^2, & p_1^2p_2^2, & \ldots, & p_1^{k_1}\cdot p_2^2,\\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
p_2^{k_2}, & p_1p_2^{k_2}, & p_1^2p_2^2, & \ldots, & p_1^{k_1}p_2^{k_2}.
\end{array}$$

(A táblázat minden száma egyenlő az oszlopa fején és a sora elején álló két szám szorzatával.) Ezek száma: $\tau=(k_1+1)(k_2+1)$.

Általánosabban, ha $A$ és $B$ egymáshoz relatív prím számok és $A$ osztói (nagyság szerint rendezve): $a_1=1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_r=A$ (számuk $\tau=r$), $B$ osztói: $b_1=1$, $b_2$, $b_3$, …, $b_s=B$ (számuk $\tau=s$), akkor e két felsorolásban az 1-től eltekintve nincs közös szám, így az $AB$ szorzat összes osztóit úgy kapjuk, ha a két felsorolás egy–egy számát minden lehetséges módon összeszorozzuk:

$$\begin{array}{ccccc}
1\ , & a_2, & a_3, & \ldots, & a_r\\
b_2, & a_2b_2, & a_3b_2, & \ldots, & a_rb_2,\\
b_3, & a_2b_3, & a_3b_3, & \ldots, & a_rb_3,\\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
b_s, & a_2b_s, & a_3b_s, & \ldots, & a_rb_s,
\end{array}\tag{1}$$

és nem nagyon nehéz bizonyítani, hogy ezek egymástól különbözők. Világos, hogy mindezek a számok osztói $AB$-nek, és más osztó nem lehetséges. Így a sorok és oszlopok számából az osztók száma $\tau = rs$.

Mindezek alapján azt sejtjük (és ezt be is bizonyíthatjuk), hogy ha pl, $p_1$, $p_2$, …, $p_r$ különböző törzsszámok, és $k_1$, $k_2$ …, $k_r$ (pozitív egész) kitevők, akkor az

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

szám osztóinak száma:

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1), \tag{2}$$

vagyis, hogy egy adott szám különböző törzsszámok hatványainak szorzataként felírt alakjából osztóinak számát úgy kapjuk, hogy valamennyi kitevőt 1-gyel növeljük, és az így kapott számokat összeszorozzuk. Háromféle törzstényező fellépése esetén már „térbeli” táblázatra van szükség, pl. $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ esetén e táblázat két „emelete”:

$$\begin{array}{cc||cc} 1, & 2, & 5 & 10 = 2 \cdot 5 \\ 3, & 6 = 2 \cdot 3 & 15 = 3 \cdot 5 & 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5. \end{array}$$

Többféle törzstényező fellépése esetén hasonló áttekinthető elrendezés már nem lehetséges, de (1) mintájára – ahol $A$ és $B$-ben többféle törzstényező is felléphet – ilyenkor is képezhetünk táblázatot pl. $n = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ esetén $A$-t $2 \cdot 3$-nak, $B$-t $5 \cdot 7$-nek véve a következő táblázat adódik:

$$\begin{array}{rrrr} 1, & 2, & 3, & 6, \\ 5, & 10, & 15, & 30, \\ 7, & 14, & 21, & 42, \\ 35, & 70, & 105, & 210. \end{array}$$

Most már (2) eredményünkre támaszkodva olyan természetes számokat, amelyek osztóinak száma egy adott $\tau$ szám, úgy képezhetünk, hogy $\tau$-t minden lehetséges módon természetes számok szorzataként írjuk, ideértve a $\tau = 1 \cdot \tau$ „kéttényezős” szorzatot is, majd a tényezőket 1-gyel csökkentve különböző törzsszámok fölé kitevőknek írjuk, végül az így kapott hatványokat összeszorozzuk.

Mivel az előírt $\tau$ értékek közül $\tau = 3$ és $\tau = 5$ törzsszám, azért ezek szerint 3, ill. 5 osztója csak a $p^{3-1} = p^2$, ill. $p^{5-1} = p^4$ alakú számoknak lehet. Nyilvánvaló, hogy a legkisebb 3, ill. 5 osztóval bíró szám $p = 2$-vel adódik: $N_3 = 2^2 = 4$, $N_5 = 2^4 = 16$.

Ha az előírt $\tau$ érték összetett szám, akkor az ennyi osztóval bíró alakok közül a legkisebb számot adót esetenként kell kiválasztanunk.

$\tau = 4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$-höz két alak lehetséges: ${p_1}^{4-1}{p_2}^{1-1} = p_1^3$ és ${p_1}^{2-1} \cdot p_2^{2-1} = p_1 p_2$. Nyilván ismét $p_1 = 2$-vel, ill. $p_1 = 2$ és $p_2 = 3$-mal adódik a legkisebb ilyen szám: $2^3 = 8$, ill. $2 \cdot 3 = 6$. Az utóbbi a kisebb, eszerint $N_4 = 6$. – A továbbiakban is $p_1$ helyére mindig 2-t, $p_2$ helyére mindig 3-at írunk.

A $\tau = 6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$-höz hasonlóan képezhető alakok: $p_1^5$ és $p_1^2 p_2$, a legkisebb számok pedig 32, ill. $2^2 \cdot 3 = 12$ (nyilvánvaló ugyanis, hogy $3^2 \cdot 2 > 2^2 \cdot 3$ (általában, ha $p_1 < p_2$ és $k_1 > k_2$, akkor $p_1^{k_1} p_2^{k_2} < p_1^{k_2} p_2^{k_2}$, mert innen $p_1^{k_2} p_2^{k_2}$-vel egyszerűsítve a helyes $p_1^{k_1-k_2} < p_2^{k_1-k_2}$ egyenlőtlenség adódik), tehát $N_6 = 12$.

Hasonlóan $\tau = 10 = 10 \cdot 1 = 5 \cdot 2$ esetén a $p_1^9$ és $p_1^4 p_2$ alakokból $N_{10} = 2^4 \cdot 3 = 48$, ugyanis kiszámítás nélkül megállapíthatjuk, hogy $2^4 \cdot 3 < 2^9 = 2^4 \cdot 2^5$.

A $\tau = 8$ szám felbontásai: $8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, az így adódó $p_1^7$, $p_1^3 p_2$ és $p_1 p_2 p_3$ alakokból (ahol $p_3$ gyanánt nyilván a nagyságra nézve 3-ik törzsszám: 5 veendő) $N_8 = 2^3 \cdot 3 = 24$. Itt a $p_1 p_2 p_3$ ból adódó legkisebb szám: 30, nagyobb a $p_1^3 p_2$ alak legkisebb lehetséges értékénél, 24-nél.

A $\tau = 16$ egytényezős felbontásából adódó $p_1^{15}$ nagyobb a kéttényezős $8 \cdot 2$ és $4 \cdot 4$ felbontásokból adódó $p_1^7 p_2$ és $p_1^3 p_2^3$ alakok legkisebb lehetséges értékénél, mert $p_1^{15-7} = p_1^8 > p_2$, ill. $p_1^{15-3} = p_1^{12} > p_2^3$. Az utóbbi két alak közül $p_1^3 p_2^3$ kisebb, mert legnagyobb közös osztójukkal, $p_1^3 p_2$-vel osztva $p_1^4 = 16 > 9 = p_2^2$. – Három tényezőre bontva $16 = 4 \cdot 2 \cdot 2$; és $p_1^3 p_2 p_3$ kisebb $p_1^3 p_2^3$-nél, mert $p_3 = 5 < 9 = p_2^2$. Viszont a $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ négytényezős felbontásból adódó $p_1 p_2 p_3 p_4$ alak legkisebb lehetséges értéke ($p_4 = 7$-tel) ismét nagyobb $p_1^3 p_2 p_3$-nál, mert $p_1^2 = 4 < 7 = p_4$. Ezek szerint $N_{16} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Hasonlóan $\tau = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$-höz $N_{36} = p_1^2 p_2^2 p_3 p_4 = 1260$, ugyanis a háromtényezős $36 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 2 \cdot 2$ felbontásokhoz tartozó $p_1^3 p_2^2 p_3^2$, $p_1^5 p_2^2 p_3$, $p_1^8 p_2 p_3$ számok nagyobbak $N_{36}$-nál, és még nagyobbnak adódnak a $9 \cdot 4 = 6 \cdot 6$ felbontásoknak megfelelő alakok legkisebb értékei. – Ugyanígy $\tau = 100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$-ből $N_{100} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45\,360$, mert pl. a háromtényezős $10 \cdot 5 \cdot 2$ felbontásra áttérve $p_4 = 7$-tel osztunk, viszont $p_1^5 = 32$-vel szorzunk. Hasonlóan a többi felbontásokhoz adódó legkisebb 100 osztós számok is nagyobbak $N_{100}$-nál.

A $\tau = 64 = 2^6$ érték hattényezős felbontásából adódó $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6$ alak legkisebb értéke ($p_5 = 11$ és $p_6 = 13$-mal) nagyobb az öttényezős $p_1^3 p_2 p_3 p_4 p_5$ alak legkisebb értékénél, mert az utóbbi annak csak $p_2^2/p_6 = {}^4/_{13}$ része. Ismét kisebbet kapunk $p_1^3 p_2^3 p_3 p_4$-ből, mert $p_2^2/p_5 = 9/11 < 1$. Viszont $p_1^3 p_2^3 p_3^3$ már nagyobb lenne, mert $p_3^2/p_4 = 25/7 > 1$. Így $N_{64} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$.

Az egymáshoz hasonló felbontási lehetőségeket nyújtó $\tau = 216 = 3^3 2^3$ és $\tau = 1000 = 5^3 2^3$ értékekből előálló alakokból a $N_{216} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 554\,400$, ill. $N_{1000} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 810\,810\,000$ szám adódik. Itt az $N_{10} = 2^4 \cdot 3$, $N_{100} = (2 \cdot 3)^4 \cdot 5 \cdot 7$ és $N_{1000} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ eredményekben mutatkozó szabályszerűség, valamint az $N_6=2^2\cdot 3$ és $N_{36}=(2\cdot 3)^2\cdot 5\cdot 7$ eredmények alapján $N_{216}$-ra a $(2\cdot 3\cdot 5)^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ szám lett volna várható, viszont a fenti $2^3(2\cdot 3\cdot 5)^2\cdot 7\cdot 11$ szám amannál kisebb, mert $2^3/13<1$.

Bár ezek szerint nincs alapunk általánosításra, az $N_{10}$, $N_{100}$ és $N_{1000}$ szabályszerűsége alapján mégis célszerű $N_{1\,000\,000}$-ra valamennyi lehetőség vizsgálata helyett az

$$N^*=(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13)^4\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37$$

számból kiindulni, amely az $1\,000\,000=5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ felbontásból adódik. Mégis látjuk, hogy ha egy $5\cdot 2$-s szorzat helyett 10-et írunk, és ezt tekintjük $k_1+1$-nek, ezáltal $p_1$ kitevője 5-tel emelkedik, viszont $p_{12}=37$ az $N^*$-ból kiesik, vagyis így $N^*$-nak 32/37-szeresét, azaz kisebb számot kapunk. Az így nyert számról könnyű elfogadni, hogy ez a legkisebb 1 000 000 osztójú szám, mert az 1 000 000 szám 10-tényezős felbontására áttérve, vagyis $p_{11}=31$-et is törölve vagy $p_2$ kitevője emelkednék 9-re, vagy $p_1$ kitevője 19-re, ami $3^5=243$-mal, ill. $2^{10}=1024$-gyel való szorzást jelent, mindenképpen $N^*$-nál nagyobb számra vezet.

Ezt a belátást természetesen még teljes bizonyítássá kellene kifejleszteni, de ez messze vezetne. Eszerint elfogadhatjuk, hogy

$$N_{1\,000\,000}=2^9(3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13)^4\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31.$$

Összeállítva *Fritz József, Frint Gábor és Grüner György*
(Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. tanulók) különböző indokolású dolgozataiból.

*Megjegyzések.* 1. A (2) képlet bizonyítása megtalálható *Faragó László:* A számelmélet elemei c. könyvben (Középisk. Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó 1954, 38. o.), továbbá az *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből c. könyvben (Tankönyvkiadó, 1960, 208. o.).

2. Egy dolgozat a tízes számrendszerben is megadta $N_{1\,000\,000}$-t, emiatt a számítást ellenőriznünk kellett. Bár az ellenőrzés hamar megmutatta, hogy a számítás hibás – a közölt szám ugyanis 3-mal nem volt osztható –, mégis kiszámítottuk a helyes értéket:

$$N_{1\,000\,000}=173\,804\,636\,288\,811\,640\,432\,320\,000.$$

Ennek kapcsán megemlítjük, hogy a feladat ötletét egy nem–európai folyóirat egy húsz évvel ezelőtti számából vettük, amely – idegen forrásra hivatkozva – az 1 000 000 osztóval bíró számok legkisebbike gyanánt a következőt közölte:

$$N=(1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376)^{66}\cdot(847\,288\,609\,443)^4,$$

a következő megjegyzéssel: „az első zárójelbeli szám a legkisebb olyan, amelynek 100 osztója van." Mivel a zárójelekben $2^{100}$, ill. $3^{25}$ áll, azért $N=2^{6600}\cdot 3^{100}$, ezért egyrészt osztóinak száma $6601\cdot 101=666\,701<1\,000\,000$, másrészt még az első zárójelbeli alap is 4 jeggyel hosszabb $N_{1\,000\,000}$-nál. – Ebből is az a tanulság, hogy számításainkat ismételten ellenőriznünk kell, és hogy tartózkodjunk a túl merész általánosításoktól.