Tájékozódásul táblázatban összeállítjuk az $n = 2, 3, 4, \ldots, 12$ számok összes osztóit és ezek alapján osztóik számát. Várható, hogy így szabályszerűségeket ismerünk fel, és azokat felhasználva válaszolhatunk a kérdésekre.

n	osztók	τ	n	osztók	τ
2	$1, 2$	2	8	$1, 2, 4, 8$	4
3	$1, 3$	2	9	$1, 3, 9$	3
4	$1, 2, 4$	3	10	$1, 2, 5, 10$	4
5	$1, 5$	2	11	$1, 11$	2
6	$1,\ 2, 3, 6$	4	12	$\begin{cases} 1,\ 2,\ 3,\ 4, \\ 6,\ 12 \end{cases}$	6
7	$1, 7$	2			

Itt τ-ra négyféle érték fordult elő: $\tau = 2$ adódott $n = 2, 3, 5, 7, 11$ esetében – vagyis a megvizsgált törzsszámokra megegyezésben azzal, hogy törzsszámnak azokat a (természetes) számokat nevezzük, amelyeknek 1-en és önmagán kívül nincs más osztója, vagyis amelyek osztóinak száma $\tau = 2$. Eszerint $\tau = 2$-re a keresett szám a legkisebb törzsszám: $N_2 = 2$.

$\tau = 3$ adódott $n = 4$ és $n = 9$ esetében; e két szám p^2 alakban írható, $p = 2$-vel, ill. $p = 3$-mal. Nyilvánvaló, hogy minden p törzsszám négyzetére $\tau = 3$, mert p^2 osztói csak az 1, p, p^2 számok. Hasonlóan, $n = 8 = 2^3$-re $\tau = 4$, és bármely p törzsszám köbének 4 osztója van: 1, p, p^2, p^3. Általában p^k osztói: 1, p, p^2, p^3, $\ldots$, p^{k-1}, p^k és számuk $\tau = k + 1$.

$\tau = 4$ adódott továbbá $n = 6 = 2 \cdot 3$ és $n = 10 = 2 \cdot 5$ esetében is. Ezek osztóit táblázatokba rendezve látjuk, hogy a második sorbeli osztók az első sorbelieknek

$$n = 6 : 1 \qquad \begin{matrix} 1, & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} \qquad n = 10 : \qquad \begin{matrix} 1, & 2 \\ 5 & 10 \end{matrix}$$

3-, ill. 5-szörösei; vagy az oszlopokat nézve: a 2-ik oszlopban az első oszlopbeli osztók 2-szerese áll. Nyilvánvaló, hogy minden, két különböző törzsszám szorzataként írható $n = p_1 p_2$ alakú számnak ugyancsak 4 osztója van:

$$\begin{matrix} 1 & p_1 \\ p_2 & p_1 p_2. \end{matrix}$$

Hasonlóan rendezhetjük el $12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ osztóit, valamint tájékozódásunkat a $36 = 3 \cdot 12$ számra kiterjesztve – a 12 osztói mellé csatlakozó 9, 18 és 36 osztókat:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} 1, & 2, & 4 = 2^2 \\ 3, & 6 = 2 \cdot 3, & 12 = 2^2 \cdot 3, \end{matrix}\right\} 12 \text{ osztói} \\ \overline{9} = \overline{3^2}, \quad \overline{18} = \overline{2 \cdot 3^2}, \quad \overline{36} = \overline{2^2 \cdot 3^2} \end{matrix}\right\} 36 \text{ osztói}$$

Általában egy $p_1^{k_1}\ p_2^{k_2}$ alakú szám osztói a következők:

$$\begin{matrix} 1, & p_1, & p_1^2, & \ldots, & p_1^{k_1}, \\ p_2, & p_1 p_2, & p_1^2 p_2, & \ldots, & p_1^{k_1} \cdot p_2, \\ p_2^2, & p_1 p_2^2, & p_1^2 p_2^2, & \ldots, & p_1^{k_1} \cdot p_2^2, \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ p_2^{k_2}, & p_1 p_2^{k_2}, & p_1^2 p_2^2, & \ldots, & p_1^{k_1} p_2^{k_2}. \end{matrix}$$

(A táblázat minden száma egyenlő az oszlopa fején és a sora elején álló két szám szorzatával.) Ezek száma: $\tau = (k_1 + 1)(k_2 + 1)$.

Általánosabban, ha A és B egymáshoz relatív prím számok és A osztói (nagyság szerint rendezve): $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$, $a_r = A$ (számuk $\tau = r$), B osztói: $b_1 = 1$, b_2, b_3, $\ldots$, $b_s = B$ (számuk $\tau = s$), akkor e két felsorolásban az 1-től eltekintve nincs közös szám, így az AB szorzat összes osztóit úgy kapjuk, ha a két felsorolás egy–egy számát minden lehetséges módon összeszorozzuk:

$$\begin{matrix} 1\ , & a_2, & a_3, & \ldots, a_r \\ b_2, & a_2 b_2, & a_3 b_2, & \ldots, a_r b_2, \\ b_3, & a_2 b_3, & a_3 b_3, & \ldots, a_r b_3, \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_s, & a_2 b_s, & a_3 b_s, & \ldots, a_r b_s, \end{matrix} \tag{1}$$

és nem nagyon nehéz bizonyítani, hogy ezek egymástól különbözők. Világos, hogy mindezek a számok osztói AB-nek, és más osztó nem lehetséges. Így a sorok és oszlopok számából az osztók száma $\tau = rs$.

Mindezek alapján azt sejtjük (és ezt be is bizonyíthatjuk), hogy ha pl, p_1, p_2, …, p_r különböző törzsszámok, és k_1, k_2 …, k_r (pozitív egész) kitevők, akkor az

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

szám osztóinak száma:

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1), \tag{2}$$

vagyis, hogy egy adott szám különböző törzsszámok hatványainak szorzataként felírt alakjából osztóinak számát úgy kapjuk, hogy valamennyi kitevőt 1-gyel növeljük, és az így kapott számokat összeszorozzuk. Háromféle törzstényező fellépése esetén már „térbeli” táblázatra van szükség, pl. $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ esetén e táblázat két „emelete”:

1,	2,	‖	5	$10 = 2 \cdot 5$
3,	$6 = 2 \cdot 3$	‖	$15 = 3 \cdot 5$	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Többféle törzstényező fellépése esetén hasonló áttekinthető elrendezés már nem lehetséges, de (1) mintájára – ahol A és B-ben többféle törzstényező is felléphet – ilyenkor is képezhetünk táblázatot pl. $n = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ esetén A-t $2 \cdot 3$-nak, B-t $5 \cdot 7$-nek véve a következő táblázat adódik:

1,	2,	3,	6,
5,	10,	15,	30,
7,	14,	21,	42,
35,	70,	105,	210.

Most már (2) eredményünkre támaszkodva olyan természetes számokat, amelyek osztóinak száma egy adott τ szám, úgy képezhetünk, hogy τ-t minden lehetséges módon természetes számok szorzataként írjuk, ideértve a $\tau = 1 \cdot \tau$ „kéttényezős” szorzatot is, majd a tényezőket 1-gyel csökkentve különböző törzsszámok fölé kitevőknek írjuk, végül az így kapott hatványokat összeszorozzuk.

Mivel az előírt τ értékek közül $\tau = 3$ és $\tau = 5$ törzsszám, azért ezek szerint 3, ill. 5 osztója csak a $p^{3-1} = p^2$, ill. $p^{5-1} = p^4$ alakú számoknak lehet. Nyilvánvaló, hogy a legkisebb 3, ill. 5 osztóval bíró szám $p = 2$-vel adódik: $N_3 = 2^2 = 4$, $N_5 = 2^4 = 16$.

Ha az előírt τ érték összetett szám, akkor az ennyi osztóval bíró alakok közül a legkisebb számot adót esetenként kell kiválasztanunk.

$\tau = 4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$-höz két alak lehetséges: ${p_1}^{4-1}{p_2}^{1-1} = p_1^3$ és ${p_1}^{2-1} \cdot p_2^{2-1} = p_1 p_2$. Nyilván ismét $p_1 = 2$-vel, ill. $p_1 = 2$ és $p_2 = 3$-mal adódik a legkisebb ilyen szám: $2^3 = 8$, ill. $2 \cdot 3 = 6$. Az utóbbi a kisebb, eszerint $N_4 = 6$. – A továbbiakban is p_1 helyére mindig 2-t, p_2 helyére mindig 3-at írunk.

A $\tau = 6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$-höz hasonlóan képezhető alakok: p_1^5 és $p_1^2 p_2$, a legkisebb számok pedig 32, ill. $2^2 \cdot 3 = 12$ (nyilvánvaló ugyanis, hogy $3^2 \cdot 2 > 2^2 \cdot 3$ (általában, ha $p_1 < p_2$ és $k_1 > k_2$, akkor $p_1^{k_1} p_2^{k_2} < p_1^{k_2} p_2^{k_2}$, mert innen $p_1^{k_2} p_2^{k_2}$-vel egyszerűsítve a helyes $p_1^{k_1-k_2} < p_2^{k_1-k_2}$ egyenlőtlenség adódik), tehát $N_6 = 12$.

Hasonlóan $\tau = 10 = 10 \cdot 1 = 5 \cdot 2$ esetén a p_1^9 és $p_1^4 p_2$ alakokból $N_{10} = 2^4 \cdot 3 = 48$, ugyanis kiszámítás nélkül megállapíthatjuk, hogy $2^4 \cdot 3 < 2^9 = 2^4 \cdot 2^5$.

A $\tau = 8$ szám felbontásai: $8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, az így adódó p_1^7, $p_1^3 p_2$ és $p_1 p_2 p_3$ alakokból (ahol p_3 gyanánt nyilván a nagyságra nézve 3-ik törzsszám: 5 veendő) $N_8 = 2^3 \cdot 3 = 24$. Itt a $p_1 p_2 p_3$ ból adódó legkisebb szám: 30, nagyobb a $p_1^3 p_2$ alak legkisebb lehetséges értékénél, 24-nél.

A $\tau = 16$ egytényezős felbontásából adódó p_1^{15} nagyobb a kéttényezős $8 \cdot 2$ és $4 \cdot 4$ felbontásokból adódó $p_1^7 p_2$ és $p_1^3 p_2^3$ alakok legkisebb lehetséges értékénél, mert $p_1^{15-7} = p_1^8 > p_2$, ill. $p_1^{15-3} = p_1^{12} > p_2^3$. Az utóbbi két alak közül $p_1^3 p_2^3$ kisebb, mert legnagyobb közös osztójukkal, $p_1^3 p_2$-vel osztva $p_1^4 = 16 > 9 = p_2^2$. – Három tényezőre bontva $16 = 4 \cdot 2 \cdot 2$; és $p_1^3 p_2 p_3$ kisebb $p_1^3 p_2^3$-nél, mert $p_3 = 5 < 9 = p_2^2$. Viszont a $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ négytényezős felbontásból adódó $p_1 p_2 p_3 p_4$ alak legkisebb lehetséges értéke ($p_4 = 7$-tel) ismét nagyobb $p_1^3 p_2 p_3$-nál, mert $p_1^2 = 4 < 7 = p_4$. Ezek szerint $N_{16} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Hasonlóan $\tau = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$-höz $N_{36} = p_1^2 p_2^2 p_3 p_4 = 1260$, ugyanis a háromtényezős $36 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 2 \cdot 2$ felbontásokhoz tartozó $p_1^3 p_2^2 p_3^2$, $p_1^5 p_2^2 p_3$, $p_1^8 p_2 p_3$ számok nagyobbak N_{36}-nál, és még nagyobbnak adódnak a $9 \cdot 4 = 6 \cdot 6$ felbontásoknak megfelelő alakok legkisebb értékei. – Ugyanígy $\tau = 100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$-ből $N_{100} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45\,360$, mert pl. a háromtényezős $10 \cdot 5 \cdot 2$ felbontásra áttérve $p_4 = 7$-tel osztunk, viszont $p_1^5 = 32$-vel szorzunk. Hasonlóan a többi felbontásokhoz adódó legkisebb 100 osztós számok is nagyobbak N_{100}-nál.

A $\tau = 64 = 2^6$ érték hattényezős felbontásából adódó $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6$ alak legkisebb értéke ($p_5 = 11$ és $p_6 = 13$-mal) nagyobb az öttényezős $p_1^3 p_2 p_3 p_4 p_5$ alak legkisebb értékénél, mert az utóbbi annak csak $p_2^2/p_6 = {}^4/_{13}$ része. Ismét kisebbet kapunk $p_1^3 p_2^3 p_3 p_4$-ből, mert $p_2^2/p_5 = 9/11 < 1$. Viszont $p_1^3 p_2^3 p_3^3$ már nagyobb lenne, mert $p_3^2/p_4 = 25/7 > 1$. Így $N_{64} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$.

Az egymáshoz hasonló felbontási lehetőségeket nyújtó $\tau = 216 = 3^3 2^3$ és $\tau = 1000 = 5^3 2^3$ értékekből előálló alakokból a $N_{216} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 554\,400$, ill. $N_{1000} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 810\,810\,000$ szám adódik. Itt az $N_{10} = 2^4 \cdot 3$, $N_{100} = (2 \cdot 3)^4 \cdot 5 \cdot 7$ és $N_{1000} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ eredményekben mutatkozó szabályszerűség, valamint

az $N_6 = 2^2 \cdot 3$ és $N_{36} = (2 \cdot 3)^2 \cdot 5 \cdot 7$ eredmények alapján N_{216}-ra a $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ szám lett volna várható, viszont a fenti $2^3(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 \cdot 7 \cdot 11$ szám amannál kisebb, mert $2^3/13 < 1$.

Bár ezek szerint nincs alapunk általánosításra, az N_{10}, N_{100} és N_{1000} szabályszerűsége alapján mégis célszerű $N_{1\,000\,000}$-ra valamennyi lehetőség vizsgálata helyett az

$$N^* = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^4 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

számból kiindulni, amely az $1\,000\,000 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ felbontásból adódik. Mégis látjuk, hogy ha egy $5 \cdot 2$-s szorzat helyett 10-et írunk, és ezt tekintjük $k_1 + 1$-nek, ezáltal p_1 kitevője 5-tel emelkedik, viszont $p_{12} = 37$ az N^*-ból kiesik, vagyis így N^*-nak $32/37$-szeresét, azaz kisebb számot kapunk. Az így nyert számról könnyű elfogadni, hogy ez a legkisebb $1\,000\,000$ osztójú szám, mert az $1\,000\,000$ szám 10-tényezős felbontására áttérve, vagyis $p_{11} = 31$-et is törölve vagy p_2 kitevője emelkednék 9-re, vagy p_1 kitevője 19-re, ami $3^5 = 243$-mal, ill. $2^{10} = 1024$-gyel való szorzást jelent, mindenképpen N^*-nál nagyobb számra vezet.

Ezt a belátást természetesen még teljes bizonyítássá kellene kifejleszteni, de ez messze vezetne. Eszerint elfogadhatjuk, hogy

$$N_{1\,000\,000} = 2^9(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^4 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$

Összeállítva *Fritz József, Frint Gábor és Grüner György*
(Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. tanulók) különböző indokolású dolgozataiból.

Megjegyzések. 1. A (2) képlet bizonyítása megtalálható *Faragó László:* A számelmélet elemei c. könyvben (Középisk. Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó 1954, 38. o.), továbbá az *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből c. könyvben (Tankönyvkiadó, 1960, 208. o.).

2. Egy dolgozat a tízes számrendszerben is megadta $N_{1\,000\,000}$-t, emiatt a számítást ellenőriznünk kellett. Bár az ellenőrzés hamar megmutatta, hogy a számítás hibás – a közölt szám ugyanis 3-mal nem volt osztható –, mégis kiszámítottuk a helyes értéket:

$$N_{1\,000\,000} = 173\,804\,636\,288\,811\,640\,432\,320\,000.$$

Ennek kapcsán megemlítjük, hogy a feladat ötletét egy nem–európai folyóirat egy húsz évvel ezelőtti számából vettük, amely – idegen forrásra hivatkozva – az $1\,000\,000$ osztóval bíró számok legkisebbike gyanánt a következőt közölte:

$$N = (1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376)^{66} \cdot (847\,288\,609\,443)^4,$$

a következő megjegyzéssel: „az első zárójelbeli szám a legkisebb olyan, amelynek 100 osztója van.” Mivel a zárójelekben 2^{100}, ill. 3^{25} áll, azért $N = 2^{6600} \cdot 3^{100}$, ezért egyrészt osztóinak száma $6601 \cdot 101 = 666\,701 < 1\,000\,000$, másrészt még az első zárójelbeli alap is 4 jeggyel hosszabb $N_{1\,000\,000}$-nál. – Ebből is az a tanulság, hogy számításainkat ismételten ellenőriznünk kell, és hogy tartózkodjunk a túl merész általánosításoktól.