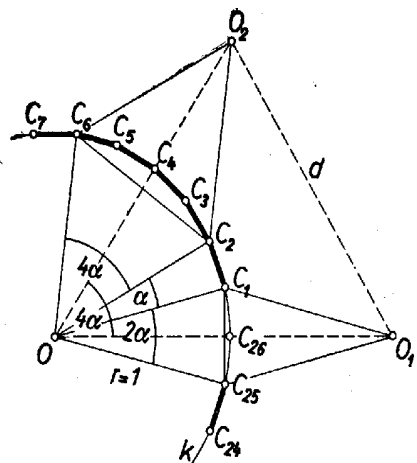


Legyen a két tükörkép O_1 , O_2 és válasszuk k sugarát hosszúságegységnek. Ekkor a k -ba írt szabályos háromszög oldala $\sqrt{3}$, azt kell tehát bizonyítanunk, hogy $O_1O_2 = d = \sqrt{3}$. Jelöljük továbbá a szabályos 26-szög egy oldalának O -ból való $360^\circ/26 = 180^\circ/13$ látószögét röviden α -val.



Az $OC_{25}O_1C_1$ és $OC_2O_2C_6$ négyszögek nyilvánvalóan egységnyi oldalú rombuszok, ezért O_1 az OC_{26} , O_2 pedig az OC_4 félegyenese van, tehát az O_1OO_2 szög egyenlő $C_{26}OC_4$ -al $= 4\alpha$ -val. A rombuszok O -nál levő szöge 2α , ill. 4α , ezért $OO_1 = 2 \cos \alpha$, $OO_2 = 2 \cos 2\alpha$. Most már az OO_1O_2 háromszögből a koszinusz tétellel

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cos 4\alpha,$$

$$d^2 = 4\cos^2 \alpha + 4\cos^2 2\alpha - 8 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha.$$

Ezt az ismert $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ azonosság felhasználásával írhatjuk így (a jobb oldalon a bizonyítandó $d^2 = 3$ állításra tekintettel különválasztjuk a 3 összeadandót):

$$(1) \quad \begin{aligned} d^2 &= 2(1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha) - 8 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \\ &= 3 + 2 \left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha \right) - 8 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

Itt a jobb oldal harmadik tagja a 914. feladatban¹ bebizonyított

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$$

azonosság szerint ($n = 2$ -t írva) egyenlő

$$(2) \quad -8 \frac{\sin 2^3 \alpha}{2^3 \sin \alpha} = -\frac{\sin 8\alpha}{\sin \alpha} \text{-val.}$$

A zárójelbeli kifejezés értékét pedig az

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

azonosság alapján,² $x = 2\alpha$ -val és $n = 2$ -vel a

$$(3) \quad \frac{\sin 5\alpha}{2 \sin \alpha}$$

hányados adja meg. Ha még figyelembe vesszük, hogy $13\alpha = 8\alpha + 5\alpha = 180^\circ$, és így $\sin 8\alpha = \sin 5\alpha$, akkor valóban

$$d^2 = 3 + \frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 8\alpha}{\sin \alpha} = 3,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Grüner György (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

¹Lásd a megoldást K. M. L. XVIII. köt. 86. o. (1958. március), továbbá Faragó László: Mat. Szakköri Feladatgyűjtemény, 525. feladat (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1955. 52. o.

²Lásd az 1. jegyzetben idézett gyűjteményben, 527. feladat, 52. o.

Megjegyzések. I. Mindkét idézett azonosság legegyszerűbben a teljes indukció módszerével bizonyítható. Itt viszont mindkettőt $n = 2$ -vel alkalmaztuk, oly kicsi számmal, amelyre a bizonyítás közvetlenül is elvégezhető az ismert

$$\begin{aligned} 2 \cos x \sin y &= \sin(x + y) - \sin(x - y) \quad \text{és} \\ 2 \cos x \cos y &= \cos(x + y) + \cos(x - y) \end{aligned}$$

azonosságok alapján. Ugyanis $y = \alpha$ -val és előbb $x = 2\alpha$, majd $x = 4\alpha$ -val

$$(4) \quad 2 \cos 2\alpha \sin \alpha = \sin 3\alpha - \sin \alpha,$$

$$(5) \quad 2 \cos 4\alpha \sin \alpha = \sin 5\alpha - \sin 3\alpha,$$

ezeket összeadva és hozzáadva még $\sin \alpha$ -t mindkét oldalhoz (1) második tagja céljára

$$\sin \alpha(1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha) = \sin 5\alpha,$$

ez pedig lényegében a (3) eredmény. Másrészt (1) harmadik tagja lépésről lépésre való alakítással

$$\begin{aligned} -4 \cos \alpha(2 \cos 2\alpha \cos 4\alpha) &= -4 \cos \alpha(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) = \\ &= -2(2 \cos 6\alpha \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha \cos \alpha) = -2(\cos 7\alpha + \cos 5\alpha + \cos 3\alpha + \cos \alpha), \end{aligned}$$

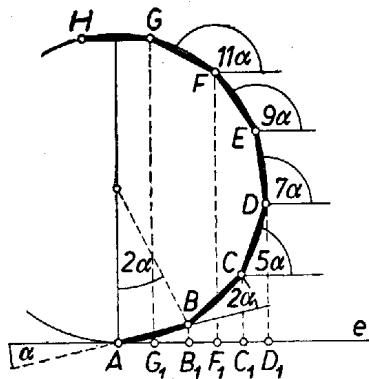
innen pedig a (4) és (5) mintájára képezett négy azonosság összeadásával (2)-re jutunk.

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

2. A fentieket továbbvíve a $\cos 2\alpha = \cos(13\alpha - 11\alpha) = \cos(180^\circ - 11\alpha) = -\cos 11\alpha$ és $\cos 4\alpha = -\cos 9\alpha$ egyenlőségek alapján (1) így is alakítható:

$$d^2 = 3 + 1 - 2(\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha + \cos 9\alpha + \cos 11\alpha),$$

elegendő tehát azt belátnunk, hogy a zárójelbeli kifejezés értéke $1/2$. Tekintsük evégett egy egységnyi oldalú szabályos 13-szög hét egymás utáni oldalát – az ábrán az $ABCDEFGH$ nyitott poligont – és vetítsük merőlegesen a csúcsokat az A -n át HG -vel párhuzamosan haladó e egyenesre.



A 13-szög mindegyik külső szöge 2α , az AB oldal e -vel bezárt szöge α , így az egymás utáni $AB, BC, CD, \dots, FG$ oldalak e -vel bezárt szöge rendre $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 9\alpha, 11\alpha$ (az utolsó három szög tompaszög). Ezért a zárójelbeli kifejezés tagjai az $AB, \dots, FG$ oldalak irányított vetületét: $\overrightarrow{AB_1}, \dots, \overrightarrow{F_1G_1}$ -et jelentik, pozitívnak véve az A -ból B_1 -be, B vetületébe mutató irányt. Ennélfogva összegük

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1E_1} + \overrightarrow{E_1F_1} + \overrightarrow{F_1G_1} = \overrightarrow{AG_1},$$

ez pedig valóban egyenlő $1/2$ -del, mert a 13-szög szimmetriája folytán az A -ban e -re emelt merőleges K -ban felezi GH -t, tehát $AG_1 = KG$.

Marton Katalin (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

3. A feladat állítása a komplex számsíkon végzett számítással is bizonyítható, abból kiindulva, hogy a szabályos 26-szög csúcsainak a 26-ik egységgyökök képeit vesszük.³

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Knuth Előd (Budapest, I. István g. III. o. t.)

4. Többen a szögfüggvény-táblázatok felhasználásával azt mutatták meg, hogy az állítás 3, vagy 4 értékes számjegynyi pontossággal igaz. E dolgozatokat hiányosnak minősítettük.

³ A felhasznált módszereket lásd pl. a következő műben: *Reiman István*: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, Középiskolai Szakköri Füzetek. Tankönyvkiadó, 1957.