Az egymás utáni hatványokat gyorsan képezhetjük ismételt szorzással, mert valamennyi vizsgálandó alap egyjegyű szám, és a kitevők nem túl nagyok. Könnyítésül próbáljuk meg, elegendő-e a magasabb hatványokból kerekítésekkel csak az első négy számjegyet kiszámítani. Ugyanis, mivel az adott alapok első 4 hatványa legfeljebb 4-jegyű, a legnagyobb kitevő 22, és így legfeljebb 18 szorzást végzünk kerekítéssel, azért az így megengedett hibák ellenére várható, hogy a legmagasabb szükséges hatványok kezdő számjegyét helyesen kapjuk meg. Még valószínűbb ez akkor, ha megállapodunk abban, hogy váltakozva fel- és lefelé kerekítünk. – Az utolsó hatvány így kapott közelítő értékét mindenesetre logaritmussal is ellenőrizzük.

Pl. 7 hatványainak sorozatában $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$; 7^5 első négy jegye 16807-ből felfelé kerekítéssel $168\underline{1}$ (az utolsó jegy aláhúzásával a felkerekítést jelöljük), 7^6 első négy jegye $7 \cdot 1681 = 11\,767$-ből lekerekítéssel 1176, ebből 7^7 első négy jegye (kerekítés nélkül) 8232; folytatólag váltakozva fel- és lefelé való kerekítéssel $7^8 \approx 5763 \cdot 10^{\alpha}$, $7^9 \approx 4034 \cdot 10^{\beta}$, $7^{10} \approx 2824 \cdot 10^{\gamma}$, $7^{11} \approx 1976 \cdot 10^{\delta}$, $7^{12} \approx 1384 \cdot 10^{\varepsilon}$, ahol a görög betűk valamely alkalmas pozitív egész számot jelölnek, értékük a feladat szempontjából nem játszik szerepet. – Másrészt négy tizedes jegyre $\lg 7 = 0{,}8451$, vagyis

$$0{,}84505 \leq \lg 7 \leq 0{,}84515,$$

ezt 12-vel szorozva, majd a táblázatból a bal oldalnál közvetlen kisebb és a jobb oldalnál közvetlen nagyobb kiírt mantisszát visszakeresve (így ugyanis az interpolálással esetleg beálló hibákat biztosan elkerüljük):

$$10{,}1406 \leq \lg 7^{12} \leq 10{,}1418,$$
$$1{,}380 \cdot 10^{10} < 7^{12} < 1{,}390 \cdot 10^{10}.$$

Eszerint 7^{12}-nek a fentebbi eljárással képezett első 3 jegye helyes. Ez nyilván a kisebb hatványokra is áll. És mivel az első négy jegyből álló számok egyike közelében sem változik meg a kezdő jegy, ennek alapján mondhatjuk, hogy 7 első 12 hatványa közül

	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös	6-os	7-es	8-as	9-es
jeggyel kezdődik	$7^5,\ 7^6,\ 7^{11},\ 7^{12}$	$7^4,\ 7^{10}$	7^3	$7^2,\ 7^9$	7^8	–	7^1	7^7	–
vagyis ... hatvány	4,	2	1	2	1	–	1	1	–

Hasonlóan készültek táblázatunk további sorai, az utolsó sorban pedig az 1000. feladatban talált statisztikai adatok találhatók. A sorokon balról jobbra végigmenve majdnem mindenütt egyre kisebb számokat találunk, csupán a 4-es alap sorában vannak 1-nél nagyobb „felugrások”.

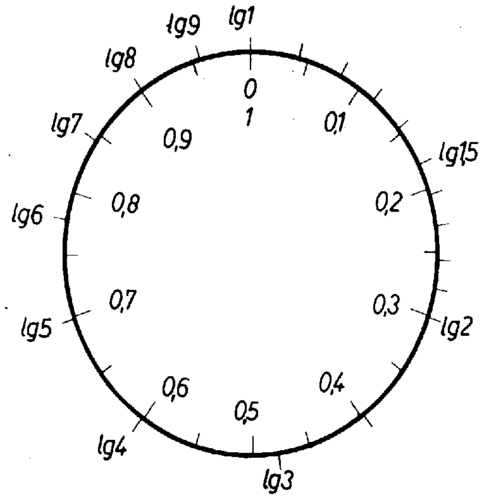
	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös	6-os	7-es	8-as	9-es
	j e g g y e l			k e z d ő d i k					
$2^1,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{10}$ közül ...	3	2	1	1	1	1	–	1	–
$4^1,\ 4^2,\ \ldots,\ 4^{10}$ „......	4	2	–	2	–	2	–	–	–
$8^1,\ 8^2,\ \ldots,\ 8^{10}$ „......	3	2	1	1	1	1	–	1	–
$5^1,\ 5^2,\ \ldots,\ 5^{10}$ „......	3	1	2	–	1	1	1	–	1
$3^1,\ 3^2,\ \ldots,\ 3^{10}$ „......	7	3	3	2	2	1	1	1	1
$9^1,\ 9^2,\ \ldots,\ 9^{10}$ „......	6	4	3	2	2	1	1	1	2
$6^1,\ 6^2,\ \ldots,\ 6^{10}$ „......	3	2	1	1	–	1	1	–	–
$7^1,\ 7^2,\ \ldots,\ 7^{10}$ „......	4	2	1	2	1	–	1	1	–
$1{,}0233,\ \ldots,\ 1{,}0233^{100}$ közül	31	17	13	9	8	7	6	5	4

A $c = 1{,}0233$ szám statisztikáját azért kaptuk az újabbaknál sokkal egyszerűbben, mert egyrészt c vizsgált hatványai 1 és 10 közé esnek és ezért az azonos kezdő jegyű hatványok a növekvő kitevők sorrendjében összefüggő sorozatokat alkotnak, másrészt a hatványok logaritmusát a számvonalon közel egyenlő, 0,01 egységnyi közű pontsorozat pontjai ábrázolják. Így pl. 2-essel kb. annyi hatvány kezdődik, ahányszor a 0,01 köz ráfér a 2 és 3 közé eső számok logaritmusait tartalmazó, $0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$ hosszúságú szakaszra. Ugyanis egy ilyen hosszú szakaszra 0,01 hosszú közökből vagy 17 teljes köz fér rá, és ekkor ezek 16 csatlakozási pontja és 2 szabad végpontja esik a szakaszra, azaz 18 pont (és 18 hatvány), és a 2 szabad végponton kívül eső csonka közök együttes hossza 0,0061, – vagy pedig 16 teljes köz van a szakaszon és a két csonka köz együttes hossza 0,0161, ekkor a pontok és hatványok száma. $15 + 2 = 17$. Más lehetőség nincs, hiszen a csonka közök együttes hossza nem érheti el a $2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$ értéket. Vagyis a pontok száma a $0{,}1761 : 0{,}01 = 17{,}61$ hányadosból vagy a fel-, vagy a lekerekítéssel adódó egész szám. (Egyébként a 0,01 hosszúság „kerek” volta nem jelentett elvi könnyebbséget, hanem csak számításit.)

A többi alapok statisztikáinak hasonló szabályszerűségeihez közelebb juthatunk a következő két észrevétel alapján.

1. Amikor a hatványok kezdő jegyének csupán az alaki értékére vagyunk tekintettel, ez azt jelenti, hogy a hatvány logaritmusának csak a mantisszáját tekintjük, karakterisztikáját nem. Ennek szemléletesen a számvonalon az felel meg, hogy a logaritmust ábrázoló pontnak a távolságát nem a 0 ponttól, hanem a tőle balra levő legközelebbi olyan ponttól tekintjük, amelynek a 0-tól való távolsága egész szám (nevezhetjük ezeket a számvonal rácspontjainak). Ha mármost a számvonalat ráfeszítjük, felcsavarjuk egy egységnyi kerületű körre (mint orsóra), akkor elsősorban minden rácspont

a kerület ugyanazon pontjába jut, és hasonlóan a kerület egy-egy pontjába jutnak a mindazon számok logaritmusát ábrázoló pontok, amelyek egymásból 10 valamely egész kitevős hatványával való szorzás útján állnak elő. Továbbá minden ugyanazon jeggyel kezdődő szám logaritmusa a kör alakú számvonal egy ívére esik, pl. a 2-essel kezdődő számok logaritmusai a $\lg 2 = 0{,}3010$ és $\lg 3 = 0{,}4771$ pontok közti ívre.



2. Mindegyik vizsgált alap utolsó vizsgált hatványa közel jár 10-nek valamely pozitív egész kitevős hatványához:

$$2^{10} = 1{,}024 \cdot 10^3, \quad 4^{10} \approx 1{,}05 \cdot 10^6, \quad 8^{10} \approx 1{,}07 \cdot 10^9, \quad 5^{10} \approx 0{,}977 \cdot 10^7,$$
$$3^{21} \approx 1{,}04 \cdot 10^{10}, \quad 9^{22} \approx 0{,}982 \cdot 10^{21}, \quad 6^9 \approx 1{,}01 \cdot 10^7, \quad 7^{12} \approx 1{,}38 \cdot 10^{10}. \tag{1}$$

Eszerint a megfelelő hatványok logaritmusát ábrázoló pontok – mindig a 0-ik hatványt is figyelembe véve – az egyenes számvonalnak egy közelítőleg egész mértékszámú szakaszán oszlanak el egyenlő távolságban. Ha pedig ezt a szakaszt feszítjük rá az előbbi kör alakú számvonalra, akkor a pontok más sorrendben, de az új sorrend szerint egymás utániak egymástól közelítőleg egyenlő távolságban helyezkednek el. (Hasonló ez ahhoz, hogy ha pl. körünkre 0,4 egységnyi íveket mérünk fel, akkor 5 ilyen ív felmérése után, a kört kétszer körüljárva visszaérünk a kiindulópontba; viszont a szomszédos pontok egymástól 0,2 egységnyi távolságban lesznek, ugyanis az egymás utáni ívvégpontok egy hurkolt szabályos ötszög, ún. szabályos csillagötszög egymás utáni csúcsai, és ezek egyszersmind egy közönséges – vagyis nem hurkolt – szabályos ötszög csúcsait is adják. [1] Ennek a c alap esetében igen jó közelítéssel egy közönséges szabályos 100-szög felelt meg.)

Most már abból, hogy e pontok közelítőleg egyenlő távolságra helyezkednek el, a fentiek szerint következik, hogy a köralakú számvonalon az 1, 2, 3, …, 9 számok logaritmusaival mint végpontokkal meghatározott ívekre eső pontok száma körülbelül arányos a hosszukkal. Az ívek hossza 10^{-4} egységben rendre

$$3010, \quad 1761, \quad 1250, \quad 969, \quad 792, \quad 669, \quad 580, \quad 511, \quad 458, \tag{2}$$

és mivel pl. a 3-as alap esetén a körön 21 pont lesz, azért az arányszámok az ívek 21-szeresei:

$$6{,}321, \quad 3{,}698, \quad 2{,}625, \quad 2{,}035, \quad 1{,}663, \quad 1{,}405, \quad 1{,}218, \quad 1{,}073, \quad 0{,}962,$$

a talált értékek pedig valóban az innen fel- vagy lekerekítéssel adódó egész számok:

$$7, \quad 3, \quad 3, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1.$$

A táblázaton a 4-es alap sorában mutatkozó nagyobb, 2 egységnyi felugrások avval magyarázhatók, hogy 4-nek nem a 10-ik hatványa az első olyan, amely igen közel áll 10 egy hatványához, hanem már az 5-ik: $4^5 = 2^{10} = 1{,}024 \cdot 10^3$. Így $4^6, \ldots, 4^{10}$ kezdő jegyei rendre egyeznek az első öt hatványéval, ezért a sor minden adata páros szám. Ez abból is látszik, hogy az (1)-beli $4^{10} \approx 1{,}05 \cdot 10^6$-ban 4 és 10 kitevőjéhez van az 1-nél nagyobb közös osztó. – Bár ugyanez a tény $7^{12} \approx 1{,}38 \cdot 10^{10}$ esetében is fennáll – láttuk, hogy $7^6 \approx 1{,}176 \cdot 10^5$ –, de az $1{,}176 \approx 7/6$ szorzó lényegesen nagyobb a 4-es alap esetében talált $1{,}024 \approx 42/41$-nél. Ez magyarázza, hogy a $7^7, \ldots, 7^{12}$ hatványok közül csak 3-nak a kezdő jegye egyezik a 6-tal kisebb kitevőjű hatvány kezdő jegyével, így a táblázatnak a 7-es alaphoz tartozó sora nem mutat 1-nél nagyobb felugrásokat. [2] – Nyilván a 4-es alaphoz hasonló ugrások adódnának, ha pl. a 2-es alap mellett az első 10 helyett az első 20, vagy 30 hatványt tekintenők.

Mindezekre támaszkodva, és egyrészt annak figyelembevételével, hogy a négyjegyű táblázat alapján $\lg 2^{1000} = 1000 \cdot \lg 2 \approx 301{,}0$, másrészt (2)-re tekintettel, – adódik, hogy a vizsgálandó hatványok közül az

1-es 2-es 3-as 4-es 5-ös 6-os 7-es 8-as 9-es

[1] Lásd az 1022. feladat 5. ábráját.

[2] A 7-es alap hatványai közül csak 6-ot tekinteni túl kevés lett volna a „tapasztalatszerzéshez". Éppen a 4-es alappal való összevetés céljára álltunk meg 7^{12}-nél, különben az (1) összeállításban $\lg 7 \approx 11/13$ alapján $7^{13} \approx 0{,}969 \cdot 10^{11}$ célszerűbb lett volna.

jeggyel kezdődők száma, 1–2 egységnyi hibát megengedve

$$301, \quad 176, \quad 125, \quad 97, \quad 79, \quad 67, \quad 58, \quad 51, \quad 46.$$

A 4-es alapnál látott és a 2-es alap első 20, 30 hatványára vonatkozóan említett egyenetlenség itt nem léphet fel. Ezt a következőképpen láthatjuk be. A $2^{11}, \ldots, 2^{20}$ hatványok kezdő jegyeit valóban rendre egyezőknek találjuk a 10-zel kisebb kitevőjű hatvány kezdő jegyével, azonban a 2-ik jegy $2^7 = 128$ és $2^{17} \approx 1{,}31 \cdot 10^5$ esetében már eltérő. A további 98 ilyen 10-tagú sorozatot $2^1, \ldots, 2^{10}$-ből rendre $2^{20}, 2^{30}, \ldots, 2^{90}$-nel való szorzás útján kapjuk, és e szorzók $1{,}049 \cdot 10^6$, $1{,}074 \cdot 10^9, \ldots$ normálalakjában az 1-től egyre jobban eltérő szorzók lépnek fel. Az utolsó szorzó pedig ismét közel áll az 1-hez: $\lg 2^{990} = 990 \cdot \lg 2 \approx 990 \cdot 0{,}3010 = 297{,}99 \approx 298{,}0$ alapján $2^{990} \approx 1 \cdot 10^{298}$ (a szorzatot 4 értékes jegyre kerekítettük). Eszerint a 7-es alap esetében látott eltolódás itt is fellép – bár sokkal lassabban – és a 2^{10}, $2^{20} = (2^{10})^2$, $2^{30} = (2^{10})^3, \ldots, 2^{990} = (2^{10})^{99}$, $2^{1000} = (2^{10})^{100}$ hatványok kezdő számjegye jó megközelítéssel ugyanúgy tolódik végig minden számjegyen, mint az 1000. feladatban a 4 jegyre felfelé kerekítéssel éppen $1{,}024 = 2^{10} \cdot 10^{-3}$-at adó $c = 1{,}0233$ alap első 100 hatványának kezdő számjegye. – Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Összeállítva és kiegészítésekkel ellátva a következők dolgozataiból:

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.),
Biborka Tamás (Makó, József A. g. III. o. t.) és
Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.).

Megjegyzések. 1. Mivel a négyjegyű logaritmustáblázat kiegészítése az $1000-1099$ számokra is megadja a mantisszát, azért $\lg 1024 = \lg 2^{10} = 3{,}0103$-ból $\lg 2$-t 5 jegyre is megkaphatjuk: 0,30103. Ezt figyelembe véve $\lg 2^{970} \approx 292{,}00$ és $\lg 2^{980} \approx 295{,}01$ (5 értékes jegyre kerekítve), vagyis a legutóbb említett végigtolódás a 970-ik hatvány körül fejeződik be, a további 30 hatvány pedig kissé torzítja a fenti eredményt. Így a (2) sorozat számait 970-nel szorozva, majd $2^1, 2^2, \ldots, 2^{30}$ statisztikáját hozzáadva a következő eloszlást kapjuk:

$$\begin{array}{lll}
\text{1-es}: \ 292+9=301, & \text{4-es}: \ 94+3=97, & \text{7-es}: \ 56+0=56,\\
\text{2-es}: \ 171+6=177, & \text{5-ös}: \ 77+3=80, & \text{8-as}: \ 50+3=53,\\
\text{3-as}: \ 121+3=124, & \text{6-os}: \ 65+3=68, & \text{9-es}: \ 44+0=44.
\end{array}$$

A két eloszlás megfelelő adatai között legfeljebb 2 egységnyi eltérés van.

2. Többen annyira pontosnak vették a kezdő jegyek ismétlődését, hogy becslésüket így adták meg: minden számjeggyel 100-szor annyi hatvány kezdődik, mint $2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$ között. Ezek szerint 2^{1000}-ig nincs – és persze azután sincs – 7-es és 9-es jeggyel kezdődő hatvány. Valóban elég későn adódnak az első ilyenek: $2^{16} \approx 7{,}03 \cdot 10^{13}$ és $2^{53} \approx 9{,}004 \cdot 10^{15}$.

3. Egy dolgozat merész és alaptalan általánosítása: „ez az eloszlási arány áll fenn bármely szám első 1000 hatványára”. Ez téves, könnyű belátni, hogy pl. $\sqrt[1001]{2}$ első 1000 hatványának mindegyike 1-essel kezdődik és $\sqrt[1000]{0{,}9}$ első 1000 hatványa mindegyikében az első értékes jegy 9-es. Ugyanezen számok további 1000 hatványában is csak a 2-es és a 3-as, ill. a 8-as lép fel első értékes jegyként – viszont ezek között nincs 1-es, ill. 9-es kezdetű.

4. Néhányan szinte rabszolgai munkával logaritmusok alapján adtak elég jó becsléseket, de nem próbálták meg megmagyarázni az észlelhető szabályszerűségeket. Ajánljuk megoldóink figyelmébe, hogy efféle terjedelmesnek látszó kérdésekben egyaránt kerüljék a konkrét példák nélküli, alaptalan általánosítást és a mindvégig a számpéldáknál való megmaradást is. A feladat előkészítő részének „kísérleti” példaanyagát arra szántuk, hogy ezek eredményei alapozzák meg az általánosabb meggondolásokat.