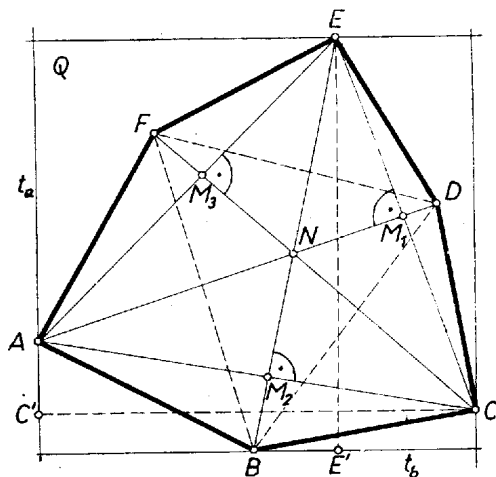


Az $ABCDEF = H$ hatszög csúcsai a feltételben szereplő szakaszpárok végpontjai között kétféle szerepet játszanak: A , C és E 3-szor lép fel, B , D , és F viszont 1-szer. A 3-ik szakaszpár úgy áll elő az elsőből, és a 2-ik a 3-ikból, hogy minden végpont helyére a H körüljárása mentén rákövetkező második pontot írjuk; ezért egyrészt A C , E , másrészt D , E , F egymás között egyenrangúak. Ez az észrevétel bizonyításunkban rövidítéseket tesz lehetővé.



Megmutatjuk, hogy H -nak A , C , E -ben levő szöge derékszög. Ezt elég pl. A -ra bebizonyítani. Az $EAB = T_1$ és $CFA = T_2$ háromszögek egybevágók (azok a csúcsok felelnek meg egymásnak, amelyeknek a felsorolásbeli sorszáma egyenlő). Ugyanis az E -ben, ill. C -ben összefutó oldalai a feltevés szerint páronként egyenlők, és a köztük levő szög is mindkettőben ugyanakkora, mert merőleges szárú hegyes szögek. Valóban, mindkét szög kisebb derékszögnél, mert az EA és CF , az EB és CA , a BE és CF átlópárok M_3 , ill. M_2 , ill. N metszéspontja H konvexitása folytán benne van H -ban, ezért az AEB szög azonos az M_3EN szöggel, és az FCA szög az NCM_2 szöggel, az utóbbi szögek pedig az M_3EN , NCM_2 derékszögű háromszögnek a derékszögtől különböző szögei. Ebből következik, hogy T_1 és T_2 körüljárása megegyező, egymással a síkjukban végzett mozgatással hozhatók fedésbe. És mivel a feltételben szereplő oldalpárjaik egymásba 90° -os forgatással átvihetők, azért ugyanez áll harmadik oldalaira, AB és FA -ra is. Másképpen: az FAB háromszög A -nál derékszögű és egyenlő szárú. (Könnyű belátni, hogy a forgatás középpontja a BF szakasz felezőpontja.)

Ugyanígy a BCD és DEF is egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Ezért a B , D , F -nél levő szögek mindegyike tompaszög, mert $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ -kal nagyobb a BDF háromszög megfelelő szögénél, másrészt H konvexitása folytán (valóságos hatszögben) kisebb 180° -nál. Az ABC szög $ABE \equiv ABM_2$ és $EBC \equiv M_2BC$ rész szögei azonban hegyes szögek, mert az ABM_2 , és M_2BC derékszögű háromszögekben a derékszög M_2 -nél van. Ugyanez áll a D és F -nél levő szögek DA , ill. FC két oldalán levő részeire.

Az A , C , E csúcsok H minden Q támasz téglalapjának kerületi pontjai, mert ha pl. a BAF derékszög csúcsán át párhuzamosokat húzunk Q oldalával, akkor vagy egyikük kettévágja a BAF szögtartományt, és így a rá merőleges egyenes támaszegyenese H -nak, vagy egybeesnek AB és AF -fel, és így A a Q -nak csúcsa. Ekkor B és F is Q kerületén van. – Másrészt a B , D , F csúcsok közül legalább egy Q kerületén van, mert ha A , C , E mindegyikében a támasz egyenes különböző H oldalaitól, ezek Q -nak csak három oldalát adják meg. – Viszont B , D , F közül legfeljebb kettő lehet a kerületen és nyilvánvaló, hogy ilyenkor a H -nak köztük levő csúcsa egyben Q -nak is csúcsa. – B , D , F mindegyike csak akkor lehetne Q kerületén, ha egyikükben H -nak 180° -os szöge volna.

Az eddigiek szerint elég H azon támasz téglalapjairól megmutatnunk, hogy származtató támasz sávjaik szélessége egyenlő, amelyek kerületén legalább a C , E , A és B csúcsok rajta vannak. H körüljárásából nyilvánvaló, hogy a téglalapokban B és E , valamint A és C egy-egy szemben fekvő oldalpáron vannak. Ha már most Q két oldala merőleges BE -re, akkor a másik kettő merőleges AC -re, így a Q -t meghatározó két támaszsáv szélessége BE , ill. AC , és ezek egyenlősége folytán Q négyzet. Ha pedig E -nek, C -nek a B -beli t_b , ill. az A -beli t_a támaszegyenesen levő E' , ill. C' vetülete B -től, A -tól különböző, akkor a sávok szélessége EE' , ill. CC' , és ezek egyenlők, mert a BEE' és ACC' egybevágó derékszögű háromszögeknek megfelelő befogói (ezekben az átfogók és az E -nél, C -nél levő merőleges szárú hegyesszögek egyenlők).

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Györgyi János (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az FAB , BCD és DEF háromszögek derékszögű egyenlő szárú volta a 957. feladat II. megoldásához fűzött megjegyzés tételéből is következik, ugyanis a feltevések folytán B , D , F az EAC háromszögből úgy származtathatók, hogy a magasság vonalakra a csúcsoktól a szemben fekvő oldal felé felmérjük a szemben levő oldal hosszát.

Gazsi Lajos (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)