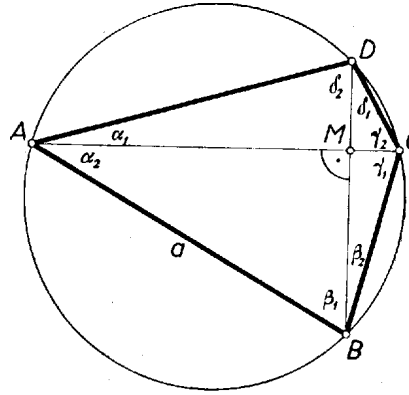


A négytagú számtani sorozat két szélső és két közbülső tagjának összege egyenlő:

$$(1) \quad \alpha + \gamma = \beta + \delta,$$

eszerint négyszögünk húrnégyszög. Legyenek másrészt az átlókkal kettévágott szögek részei rendre $DAC = \alpha_1$, $CAB = \alpha_2$, $ABD = \beta_1$, $DBC = \beta_2$, $BCA = \gamma_1$, $ACD = \gamma_2$, $CDB = \delta_1$, $BDA = \delta_2$.



Így, mivel háromtagú számtani sorozat összege egyenlő a középső tag háromszorosával, az ABD háromszögből $\beta_1 = 60^\circ$. A négyszög körbe írható volta és az átlók merőlegessége folytán $\gamma_2 = 60^\circ$, $\delta_1 = \alpha_2 = 30^\circ$, továbbá $\beta_2 = \alpha_1$. Ezért a négytagú sorozat különbsége $\varepsilon = \beta - \alpha = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) = 60^\circ - 30^\circ + (\beta_2 - \alpha_1) = 30^\circ$, tehát (1)-re és a négyszög szögeinek összegére tekintettel $\alpha + \gamma = \alpha + (\alpha + 3) = 2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$ -ból $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\delta = 105^\circ$, $\gamma = 135^\circ$, továbbá $\alpha_1 = \beta_2 = 15^\circ$, $\gamma_1 = \delta_2 = 75^\circ$. Ezek szerint az ABC háromszög egyenlő szárú, $AC = AB = 1$.

Most már a szinusz-tétel ismételt alkalmazásával a további oldalak és átló

az ABC háromszögből $BC = \sin 30^\circ : \sin 75^\circ \approx 0,5176$;

„ ABD „ $AD = \sin 60^\circ : \sin 75^\circ \approx 0,8966$;

„ ABD „ $BD = \sin 45^\circ : \sin 75^\circ \approx 0,7321$;

„ ACD „ $CD = \sin 15^\circ : \sin 105^\circ \approx 0,2679$ egység,

és végül az átlók merőlegessége folytán szorzatuk feléből a négyszög területe $t = BD/2 = 0,3660$ területegység.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha a szinusz függvény összeadási (addíciós) tétele alapján ismertnek tekintjük a

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \text{ és}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

értékeket, akkor eredményeinket a táblázat, vagyis tizedes alakú közelítő törtek használata nélkül, pontos, „zárt” alakban is felírhatjuk:

$$BC = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2, \quad AD = (3\sqrt{2} - \sqrt{6})/2, \quad BD = \sqrt{3} - 1, \\ CD = 2 - \sqrt{3} \quad \text{és} \quad t = (\sqrt{3} - 1)/2.$$

Fejes László (Makó, József A. g. IV. o. t.)

2. Ezekhez az eredményekhez trigonometriai ismeretek nélkül, csupán a Püthagorász-tétel ismételt alkalmazásával és némi ügyeskedéssel is eljuthatunk. Az átlók metszéspontját M -mel jelölve az ABM derékszögű háromszögből $BM = 1/2$, $AM = \sqrt{3}/2$. Így $MC = AC - AM = (2 - \sqrt{3})/2$, és egyrészt a BCM derékszögű háromszögből

$$BC = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{6} \cdot 2 + 2}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

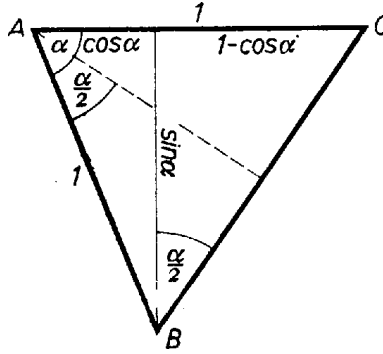
másrészt CDM -ből $CD = 2MC = 2 - \sqrt{3}$ és $MD = MC\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 3)/2$, ennél fogva $BD = BM + MD = \sqrt{3} - 1$. Végül DAM -ból

$$DA = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{21 - 12\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{18 - 2\sqrt{18} \cdot 6 + 6}{4}} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{2}.$$

3. Az előző megjegyzésnek az ABC háromszögre vonatkozó gondolatát bármely hegyes α szögre alkalmazva az értékes, de kevésbé ismert

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

összefüggéshez jutunk; ugyanis $BM = \sin \alpha$, $AM = \cos \alpha$, $CM = 1 - \cos \alpha$, továbbá $\angle C = (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ - \alpha/2$ és így $\angle CBM = \alpha/2$.



4. Néhány dolgozat az ABD háromszög 60° -os szögét A , vagy D -hez téve az $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 80^\circ$, ill. $\alpha = 67,5^\circ$, $\beta = 82,5^\circ$ esetet is kidolgozta 2-ik, ill. 3-ik megoldásként. A szövegben azonban nem az áll, hogy az ABD háromszög szögei valamilyen sorrendben alkotnak számtani sorozatot, hanem hogy ez az *egymás utáni* szögekre, vagyis az A , B , D csúcsú szögre áll.