Az O origóhoz legközelebb vannak az $A_1(1,\ 0)$, $A_3(0,\ 1)$, $A_5(-1,\ 0)$ és $A_7(0,\ -1)$ rácspontok, távolságuk $OA_{2k-1} = 1$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, ezek O legközelebbi szomszédai. Ezek után legkisebb az OA a távolság az $A_2(1,\ 1)$, $A_4(-1,\ 1)$, $A_6(-1,\ -1)$, $A_8(1,\ -1)$ pontokra: $OA_{2k} = \sqrt{2}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

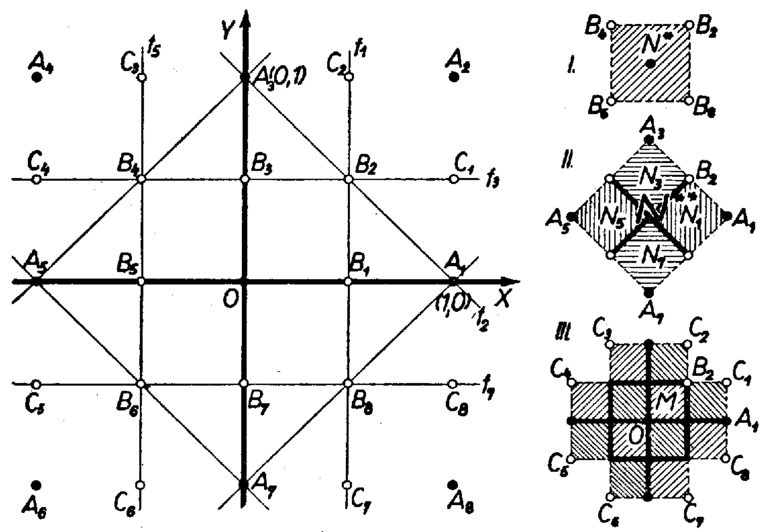
Egy az I. követelménynek eleget tevő pontot P-vel és egy a P körül írt k kör sugarát r-rel jelölve O akkor és csak akkor van k kerületén vagy a belsejében, ha $OP \leq r$, és A_1 akkor külső pont k-ra nézve, ha $r < A_1P$. Ezért $OP < A_1P$, vagyis P-nek az OA_1 szakasz f_1 felező merőlegeséhez képest azon az oldalon kell lennie, amelyen O van. Ezt a követelményt P abszcisszájával $x < 1/2$ alakban írhatjuk fel, ugyanis f_1 egyenlete $x = 1/2$.

Hasonlóan: ahhoz, hogy k tartalmazhassa O-t, de ne tartalmazza A_3-at, A_5-öt, illetve A_7-et, kell, hogy P az OA_3, OA_5, OA_7 szakasz f_3, f_5, f_7, felező merőlegesének O-t tartalmazó oldalán legyen. Ehhez szükséges és elegendő, hogy P koordinátáira álljon:

$$y < 1/2, \quad \text{ill.} \quad x > -1/2, \quad \text{ill.} \quad y > -1/2.$$

Avégett, hogy k tartalmazza O-t, de A_1, A_3, A_5, A_7 egyikét se tartalmazza, *mind a négy* feltételnek teljesülnie kell, P-nek az f_1, f_5 és f_3, f_7 egyenespárokkal határolt síksávok közös belső pontjának, a $B_2B_4B_6B_8 = N^*$ négyzet belső pontjának kell lennie, amelynek csúcsai a $B_2(1/2,\ 1/2)$, $B_4(-1/2,\ 1/2)$, $B_6(-1/2,\ -1/2)$, $B_8(1/2,\ -1/2)$ pontok. Mindez ahhoz is elegendő, hogy k ne tartalmazza A_{2k}-t se, mert N^* belseje teljesen OA_{2k} felező merőlegesének O-t tartalmazó oldalán van (lásd pl. az OA_2 szakasz A_1A_3 felező merőlegesét). Még-inkább áll ez az O-tól távolabbi rácspontokra, ennélfogva az I. követelménynek N^* belső pontjai és csak ezek tesznek eleget. A P koordinátáira talált négy követelményt a következő kettőbe vonhatjuk össze: $|x| < 1/2$ és $|y| < 1/2$.

A II-ben előírt, O-n felüli egyetlen rácspont csak valamelyik A_{2k-1} lehet. Ha ugyanis volna olyan P közepű k, amely (az O-n felül) pl. A_2-t tartalmazza, de A_1-et és A_3-at nem, ebből az I. esethez hasonlóan adódnék, hogy P az f_3 és f_1-nek A_2-t tartalmazó oldalán van. Ekkor viszont fennáll $PA_3 < PO$ és $PA_1 < PO$, és ez ellentmond a feltevésnek.



Keressük tehát először azon k körök P középpontjának helyét, amelyek tartalmazzák O-t és A_1-et, de további rácspontot nem. Így $PO < PA_2$ és $PO < PA_8$, ezért P az OA_2, OA_3 szakasz A_1A_3, illetve A_1A_7 felező merőlegesének O-t tartalmazó oldalán van, másrészt $PA_1 < PA_3$ és $PA_1 < PA_7$, ezért P-nek az OA_2, OA_8 egyenes A_1-et tartalmazó oldalán, vagyis az $OB_8A_1B_2 = N_1$ négyzet belsejében kell lennie. Az ilyen P körüli k – ha nem tartalmazza A_2, A_3, A_7, A_8 egyikét sem, – akkor nyilván más rácspontot sem, ezért N_1 minden belső pontja megfelel II-nek.

Hasonlóan mindazok a P középpontok, amelyek körül van olyan k, melyben az O-n felüli egyetlen rácspont az A_3, az A_5, ill. az A_7, rendre az $OB_2A_3B_4 = N_3$, $OB_4A_5B_6 = N_5$, $OB_6A_7B_8 = N_7$, négyzet belső pontjai, és csak ezek.

Mivel pedig II. csak úgy teljesül, ha k az O-t, továbbá *vagy* A_1-et, *vagy* A_3-at, *vagy* A_5-öt, *vagy* A_7-et tartalmazza, azért P-nek *vagy* N_1, *vagy* N_3, *vagy* N_5, *vagy* N_7 belsejében kell lennie. Így is mondhatjuk: P csak az $A_1A_3A_5A_7 = N^{**}$ négyzet belsejében lehet, de nem lehet rajta a B_2B_6, B_4B_8 oldalfelezőkön. Ezt a feltételt P koordinátáival így lehet kifejezni:[1]

$$|x| + |y| < 1, \quad \text{de} \quad |x| \neq |y|.$$

A III. követelményben O-n felül előírt két további rácspont nem lehet egymástól 2 egységnyi távolságra, mint pl. A_1 és A_5. Ezt ugyanis így mondhatnók: k tartalmazza az O, A_1 rácspontpárt, de A_2, A_8, A_3, A_7-et nem, ezért – mint a II-ben láttuk – P az N_1-belsejében van, továbbá k tartalmazza az O, A_5 párt, de nem tartalmazza A_4, A_6, A_3, A_7-et, ezért P az N_5 belsejében van. Már pedig N_1 és N_5 belsejének nincs közös pontja. – Nyilván még kevésbé lehet a két pont egymástól nagyobb távolságra, ezért O és a két további rácspont csak egy derékszögű egyenlő szárú háromszög csúcsai lehetnek.

Ha ez a 3 pont pl. O, A_1, A_3, akkor a $PA_1 < PA_2$, $PA_3 < PA_7$, $PA_3 < PA_2$, és $PA_1 < PA_5$ követelmények folytán P csak az $OB_1B_2B_3 = M$ négyzet belsejében lehet. Végigmenve a további két pont minden lehetséges megválasztásán

[1] Bővebb indokolás helyett utalunk az 1959. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny I. fordulójának 1. feladatával fennálló hasonlóságra, lásd K. M. L. XIX. kötet 4. o. (1959 szeptember).

(A_1 és A_2, A_1 és A_3, A_1 és A_7 stb., 12 eset) P számára a $C_1B_2C_2C_3B_4C_4C_5B_6C_6C_7\ B_8C_8$ idom belsejét kapjuk, ahol C_k az A_kA_{k-1} szakasz felező pontja ($1 \leq k \leq 8$, A_9-nek A_1 tekintendő), kivéve azonban az idomból N^* kerületének és A_1A_5, A_3A_7 tengelyeknek pontjait. P koordinátáival kifejezve a következő két feltételcsoportból legalább az egyiknek kell teljesülnie:

$$\text{III.}\quad \begin{array}{lllll} a) & |x| < 1, & |y| < 1/2, & x \neq 0, & |x| \neq 1/2; \\ b) & |x| < 1/2, & |y| < 1, & y \neq 0, & |y| \neq 1/2. \end{array}$$

Ezzel eleget tettünk a feladat utasításának.

Gáti Pál (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)