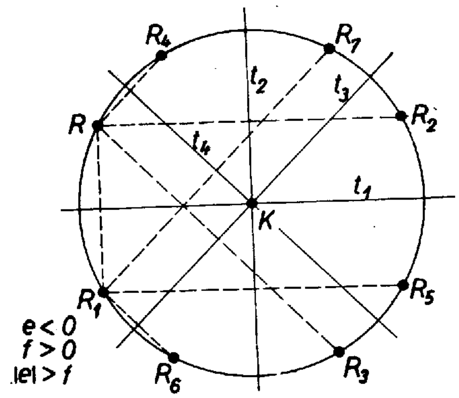
Ha K mindkét koordinátája egész szám: $(a,\, b)$, akkor bármely a K körül írt és egy további R $(c,\, d)$ rácsponton átmenő k körön általában 8, de legalább 4 rácspont van (1. ábra).

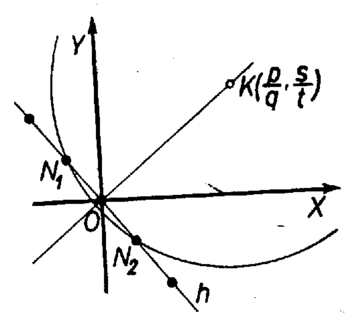


1. ábra

Ha ugyanis bármely rácsponton át párhuzamost húzunk az X, Y-tengellyel, valamint az I és II síknegyedbeli szögfelezőikkel, akkor e t_1, t_2, t_3, t_4 egyenesek bármelyikére tükrözve a sík minden pontját a rácspontok tükörképe is rácspont lesz. – Ha $c-a=e$ és $d-b=f$, vagyis R így is írható: $R(a+e,\, b+f)$, akkor R tükörképe t_1, t_2, t_4-re rendre $R_1(a+e,\, b-f)$, $R_2(a-e,\, b+f)$, $R_3(a+f,\, b+e)$, $R_4(a-f,\, b-e)$, továbbá R_1 tükörképe t_2, t_3, t_4-re $R_5(a-e,\, b-f)$, $R_6(a-f,\, b+e)$, $R_7(a+f,\, b-e)$, és ezek mindegyike rácspont, mert koordinátáik egészek, és a tükrözések folytán valamennyinek K-tól való távolsága a KR távolsággal egyenlő. Az R, R_1, …, R_7 pontok csak akkor különbözők, ha e és f abszolút értéke egymástól és 0-tól különböző. Ha e és f egyike 0, vagy ha $|e|=|f|\neq 0$, akkor a pontok páronként egybeesnek ($e=f=0$ lehetetlen, mert K és R különbözők).

Ha K egyik koordinátája, pl. abszcisszája a egész, ordinátája pedig tetszés szerinti β valós szám, akkor legyen egy tetszés szerinti rácspont, amelynek abszcisszája kisebb, mint K-é, $R(c,\, d)$, ahol $c<a$. Így a K körül írt KR sugarú kör átmegy R-nek az $x=a$ rácsegyenesre (az előbbi t_2-re) való, és R-től különböző $R_2(2a-c,\, d)$ tükörképén, amely szintén rácspont. Hasonlóan látható be az állítás helyessége, ha K abszcisszája valós és ordinátája egész szám.

Legyenek végül K koordinátái (tovább egyszerűsíthetetlen alakú) törtek: p/q és s/t, ahol p és s a 0-tól különböző egészek, q és t 1-nél nagyobb egészek, továbbá p és q, valamint s és t relatív prímek (2. ábra).



2. ábra

Az állítás igazolására elegendő megmutatnunk, hogy bármely F rácsponthoz megadható olyan K középpontú kör, melyben az F-en átmenő és KF-re merőleges h húr végpontjai rácspontok. Válasszuk F-nek az O origót. Ekkor a KO egyenes és a rá merőleges egyenes iránytangense qs/pt, ill. $-\,pt/qs$, ennélfogva h egyenlete $y=-ptx/qs$, másképpen $ptx+qsy=0$. Ezen az egyenesen bármely egész j esetén rajta van a $(jqs,\, -jpt)$ rácspont, mert koordinátái kielégítik az egyenletet. A $j=n$ és $j=-n$ értékekhez tartozó $N_1(nqs,\, -npt)$ és $N_2(-nqs,\, npt)$ pontok egymás tükörképei O-ra (mint fentebb pl. R és R_5), és így a KO tengelyre is, ezért a K körül KN_1 sugárral írt kör átmegy N_2-n is.

A legutóbbi meggondolás az előbbi két esetben is használható, ha F gyanánt olyan rácspontot veszünk, amelynek sem abszcisszája, sem ordinátája nem egyenlő K megfelelő koordinátájával.

Ezzel az állításnál többet bizonyítottunk be, ti. azt, hogy minden racionális koordinátákkal bíró K pont körül számtalan sok olyan kör írható, amelynek kerületén legalább két rácspont van. Ugyanis a fenti meggondolásban az n (pozitív) egész számot számtalan sokféleképpen választhatjuk, és más n esetén mindig más kört kapunk.

Rátkai János (Kisújszállás, Móricz Zs. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Más utakon is lehet racionális koordinátájú pont körüli, több rácsponton átmenő kört találni.

2. Könnyű belátni azt is, hogy a KO egyenesen is számtalan sok rácspont van. Ha F gyanánt ilyet választunk, megeshet, hogy korábban már szerepelt kört kapunk. Emiatt nem volna helyes a legutóbbi állításban ebből indulni

ki: „F-et és n-et számtalan sokféleképpen választhatjuk”. Azért sem volna ez helyes, mert más F-et választva más h egyenes adódik.

3. Egy dolgozat a 971. feladatra hivatkozva ezt állítja: „A tétel megfordítható: ha egy kör kerületén legalább két rácspont van, akkor a középpont koordinátái racionális számok”. Ez helytelen, a fenti $K(\alpha,\, \beta)$ esetben β lehet irracionális, pl. a $(0,\, \sqrt{2})$ középpont körül $\sqrt{3}$ sugárral írt kör átmegy az $(1,\, 0)$ és $(-1,\, 0)$ rácspontokon.

4. Több dolgozat „racionális számon” csak törtet értett.