

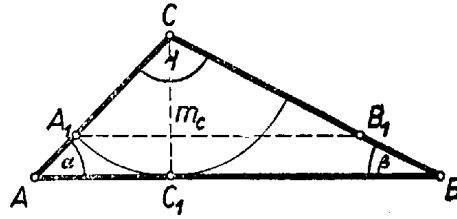
Az alkotórészek szokásos jelöléseivel a háromszög és a körcikk területe

$$t_1 = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{m_c}{\sin \beta} \cdot \frac{m_c}{\sin \alpha} \sin \gamma = \frac{m_c^2 \sin \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta}, \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{m_c^2 \gamma}{2}$$

ahol t_2 -ben γ abszolút mértékben (radiánban) értendő. Így a $t_2 = t_1/2$ követelményből ekvivalens átalakításokkal (ugyanis $\sin \alpha$ és $\sin \beta$ egyike sem 0)

$$(1) \quad 2\gamma \sin \alpha \sin \beta = \sin \gamma.$$

I. Az I. feltételben említett derékszög megválasztására két különböző lehetőség van: vagy $\gamma = \pi/2$, vagy α és β közül az egyik, nem lényeges, hogy melyik.



1. ábra

1. eset. $\gamma = \pi/2$ esetén α és β pótszögek, ezért $\sin \beta = \cos \alpha$, tehát (1) így alakul:

$$\sin 2\alpha = 2/\pi, \quad \text{és innen} \quad \alpha \approx 19^\circ 46'.$$

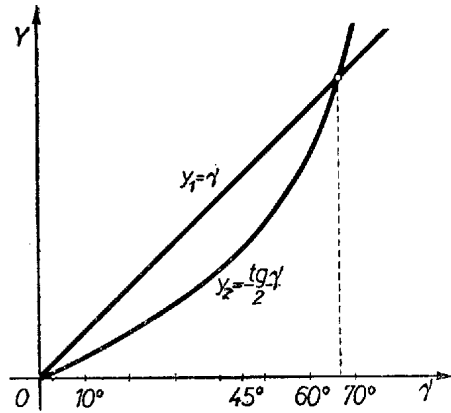
(A második megoldás ennek pótszöge, ugyanarra a háromszög alakra vezet.) A háromszög szögei:

$$I_1 : \quad 19^\circ 46', \quad 70^\circ 14', \quad 90^\circ.$$

2. eset. $\alpha = \pi/2$ esetén β és γ pótszögek, $\sin \beta = \cos \gamma$, ezek alapján (1) így alakul:

$$(2) \quad \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma$$

Ennek az egyenletnek keressük hegyesszög megoldását. E célból ábrázoljuk a $0 < \gamma < \pi/2$ intervallumban az $y_1 = \gamma$ és $y_2 = (\operatorname{tg} \gamma)/2$ függvényeket (2. ábra).



2. ábra

Mindkettő grafikonja az origóból indul, az első meredekebben, mint a második. Az első vonal 45° -os egyenes, a második egyre erősebben növekszik és $\gamma = \pi/2$ közelében felvesz tetszőleges nagy értéket. Így a két vonalnak egy metszéspontja, tehát a (2) egyenletnek egy a feladatnak megfelelő megoldása van. Ezt a megoldást rendszeres próbálgatással határozzuk meg közelítőleg.

A grafikon szerint 67° körüli abszcisszájánál van a két vonal metszéspontja, ezt vesszük első közelítő értéknek. A

$$\gamma_1 = 67^\circ \approx 1,169 \text{ értéknél } 0,5 \operatorname{tg} \gamma_1 \approx 1,178,$$

vagyis (2) jobb oldala nagyobb. Így a grafikonok figyelembevételével (2) gyöke 67° -nál kisebb lesz. Újabb közelítésül $0,5^\circ$ -kal kisebb γ_2 szöget választva

$$\gamma_2 = 66,5^\circ \approx 1,161, \quad \text{itt} \quad 0,5 \operatorname{tg} \gamma_2 \approx 1,150 < \gamma_2,$$

tehát ennél nagyobb értéket kell keresnünk.

A „Függvénytáblázatok” szerint $y = \operatorname{tg} x$ a γ_2 és γ_1 között majdnem egyenletesen növekszik, ugyanis változása $0,1^\circ$ -onként

$$2,311 - 2,300 = 2,322 - 2,311 = 2,333 - 2,322 = 2,344 - 2,333 = 0,011$$

és

$$2,356 - 2,344 = 0,012.$$

Így grafikonjának e rövid szakasza alig tér el az egyenestől, ennek alapján a harmadik közelítő értéket kereshetjük a lineáris interpoláció visszafordításával, annál is inkább, mert percnyi pontosságra törekedve $\operatorname{tg} \gamma$ értékét is interpolációval kell képeznünk. Tekintsük (2) átrendezett alakja jobb és bal oldalának

$$(3) \quad \Delta = \operatorname{tg} \gamma - 2\gamma$$

különbségét. γ_2 esetében $\Delta_2 \approx 2,300 - 2,321 = -0,021$. Hasonlóan $\Delta_1 \approx 2,356 - 2,339 = +0,017$. Eszerint míg a szög γ_2 -től γ_1 -ig, vagyis $0^\circ 30'$ -et nő, addig Δ növekedése $0,017 - (-0,021) = 0,038$. Mi azt keressük, mekkora δ értékkel növeljük γ_2 -t, hogy $\Delta = 0$ legyen, vagyis $-0,021$ -hez képest $0,021$ -del növekedjék. Eszerint

$$\delta : 30' = 0,021 : 0,038, \quad \text{innen} \quad \delta \approx 17'.$$

Valóban a $\gamma_3 = \gamma_2 + \delta \approx 66^\circ 47' \approx 1,1656$ értékkel $\operatorname{tg} \gamma \approx 2\gamma \approx 2,331$. Eszerint ezen háromszög szögei:

$$I_2 : \quad \alpha = 90^\circ, \quad \beta \approx 23^\circ 13', \quad \gamma \approx 66^\circ 47'.$$

II. A háromszög két szögének a II. követelményben szereplő egyenlősége ugyancsak kétféleképpen lehetséges: a kiemelt szerepet játszó γ különbözik a másik két szögtől, tehát $\alpha = \beta$, ill. egyikkel egyenlő, pl. $\alpha = \gamma$.

1. eset. $\alpha = \beta = (180^\circ - \gamma)/2$ esetén $\sin \alpha = \sin \beta = \cos \gamma/2$, ezért (1) így alakítható

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \gamma}{4 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Ez a $\gamma/2 = \varepsilon$ ismeretlenre a (2)-vel azonos egyenlet, tehát megoldása $\varepsilon \approx 66^\circ 47'$, és így a szögek:

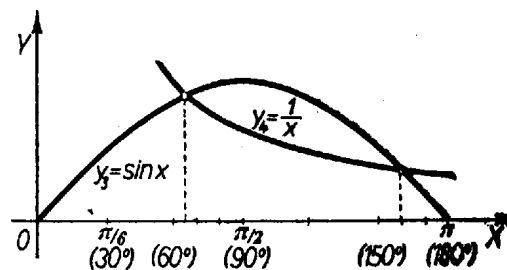
$$II_1 : \quad \gamma \approx 133^\circ 34', \quad \alpha = \beta \approx 23^\circ 13'.$$

(A fenti két egyenlet megfelelése az 1. ábra szemléletéből is nyilvánvaló, mert, ilyenkor CC_1 két egybevágó, C_1 -nél derékszögű háromszögre vágja ABC -t, és így mindkettőben teljesülnie kell az I. 2. eset követelményeinek.)

2. eset. $\alpha = \gamma$ folytán $\beta = 180^\circ - 2\gamma$, tehát (1)-ből $\sin \gamma \neq 0$ figyelembevételével majd $2\gamma = x$ jelöléssel

$$(4) \quad 2\gamma \sin 2\gamma = 1, \quad \text{ill.} \quad \sin x = \frac{1}{x}.$$

Itt tehát első közelítő értéket ismét két jól ismert grafikon: $y_3 = \sin x$ és $y_4 = 1/x$ metszéséből kereshetünk. γ hegyesszög, tehát y_3 számára a $0 < x < 180^\circ = \pi$ intervallum jön szóba, y_4 számára viszont elég, ha $x \geq 1$, mert (4) bal oldala nem nagyobb 1-nél.



3. ábra

A 3. ábra szerint két metszéspont van: 64° és 160° körül. Ezeket a fentihez hasonlóan „kifinomítva” a megfelelő háromszögek szögei $x \approx 63^\circ 50'$ -ből, ill. $x \approx 158^\circ 52'$ -ből:

$$II_{2,1} : \quad \gamma = \alpha \approx 31^\circ 55', \quad \beta \approx 116^\circ 10',$$

$$II_{2,2} : \quad \gamma = \alpha \approx 79^\circ 26', \quad \beta \approx 21^\circ 8'.$$

III. A háromszög területét kétféleképpen felező vonalak hosszának összehasonlításához fejezzük ki t_1 -et m_c -vel és c -vel, t_2 -t pedig az m_c sugárral és az i ívvel:

$$2t_1 = m_c c, \quad 2t_2 = m_c i,$$

és így

$$(5) \quad t_2/t_1 = 1/2\text{-ből} \quad i = c/2.$$

Legyen másrészt az ABC háromszög területét felező, az AB -vel párhuzamos szakasz A_1B_1 . Így az A_1B_1C háromszög hasonló ABC -höz. Területét t'_1 -vel jelölve a követelmény, illetőleg ismert tétel szerint

$$t'_1 : t_1 = 1 : 2 \quad \text{és} \quad t'_1 : t_1 = A_1B_1^2 : AB^2,$$

ennélfogva $A_1B_1 = AB/\sqrt{2} = c/\sqrt{2}$. Ezt (5)-tel összehasonlítva: $A_1B_1/i = \sqrt{2}$, vagyis a területet felező, AB -vel párhuzamos szakasz minden adódott háromszögben hosszabb az ívnél, elég jelentősen: annak több mint 40%-ával.

Nováky Antal (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Legutóbbi megállapításunk természetesen csak az olyan háromszögekre érvényes, amelyekben a területfelező ív középpontja az egyik csúcs, és az ív érinti a szemben fekvő oldalt.