

I. megoldás: Az adott képezési szabállyal a sorozat első 7 tagja:

$$(1) \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 17, \quad 33, \quad 65.$$

Tekintsük a szomszédos tagok különbségeiből álló sorozat így kiszámítható tagjait:

$$c_1 - c_0 = d_0 = 1, \quad c_2 - c_1 = d_1 = 2, \quad d_2 = 4, \quad d_3 = 8, \quad d_4 = 16, \quad d_5 = 32.$$

Ezek mértani sorozatot alkotnak, bármelyik (eddigi) két szomszédos különbség hányadosa 2. Ez bármely két szomszédos különbségre igaz, ugyanis

$$\frac{d_j}{d_{j-1}} = \frac{c_{j+1} - c_j}{c_j - c_{j-1}} = \frac{(3c_j - 2c_{j-1}) - c_j}{c_j - c_{j-1}} = \frac{2(c_j - c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} = 2,$$

és így $d_k = 2^k$.

Fejezzük ki c_k -t a d_j -k segítségével, ebből már remélhető a kívánt jellegű előállítás

$$\begin{aligned} c_k &= (c_k - c_{k-1}) + c_{k-1} = (c_k - c_{k-1}) + (c_{k-1} - c_{k-2}) + c_{k-2} = \dots = \\ &= (c_k - c_{k-1}) + (c_{k-1} - c_{k-2}) + \dots + (c_2 - c_1) + (c_1 - c_0) + c_0 = \\ &= d_{k-1} + d_{k-2} + \dots + d_1 + d_0 + c_0. \end{aligned}$$

Így a d_j -k talált kifejezését beírva (és az összeadandók sorrendjét megfordítva)

$$c_k = 2 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) = 2 + \frac{2^k - 1}{2 - 1},$$

vagyis

$$(2) \quad c_k = 2^k + 1.$$

Vegyük észre, hogy e kifejezés $k = 0$ -ra és $k = 1$ -re is érvényes.

Most már az első n tag összege:

$$\begin{aligned} S_n &= c_0 + c_1 + \dots + c_{n-1} = (2^0 + 1) + (2^1 + 1) + \dots + (2^{n-1} + 1) = \\ &= (1 + 2 + \dots + 2^{n-1}) + n, \\ (3) \quad S_n &= 2^n - 1 + n. \end{aligned}$$

Az S_n , S_{n-1} és S_{n-2} közti összefüggés előállítása céljára (3)-ból, valamint (2)-ből $k = n$ -nel

$$\begin{aligned} 2^n &= c_n - 1 = S_n - n + 1, \quad \text{vagyis} \\ c_n &= S_n - n + 2. \end{aligned}$$

Eszerint

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= S_{n-1} - (n-1) + 2, \\ c_{n-2} &= S_{n-2} - (n-2) + 2. \end{aligned}$$

Ezeket az adott összefüggésbe helyettesítve

$$\begin{aligned} S_n - n + 2 &= 3(S_{n-1} - n + 3) - 2(S_{n-2} - n + 4), \\ (4) \quad S_n &= 3S_{n-1} - 2S_{n-2} - 1. \end{aligned}$$

Bach Katalin (Szeged, Rózsa F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha már sejtjük a $c_k = 2^k + 1$ összefüggést, ez teljes indukcióval is bizonyítható: $k = 0$, 1-re érvényes az összefüggés, és ha $k-1$, és $k-2$ olyan számok, amelyekre $c_{k-1} = 2^{k-1} + 1$, $c_{k-2} = 2^{k-2} + 1$, akkor k is ilyen, mert

$$c_k = 3c_{k-1} - 2c_{k-2} = (2+1)(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) = 2^k + 1.$$

Hasonlóan lehet bizonyítani – ha már észrevettük – az (4) összefüggést.

Miklóssy Endre (Szolnok, Verseyhy F. g. IV. o. t.)

2. A (4) összefüggést a következő megfontolással is megkaphatjuk. A (3) jobb oldalán álló 2^n , n tagokat ki kell fejeznünk S_{n-1} , S_{n-2} -vel. Evégett a (3)-ból n helyén $n-1$ és $n-2$ -vel adódó egyenlőségeket:

$$n + \frac{2^n}{2} = S_{n-1} + 2, \quad n + \frac{2^n}{4} = S_{n-2} + 3$$

alakban írva mint az n és 2^n „ismeretlenekre” fennálló egyenletrendszert megoldjuk:

$$n = -S_{n-1} + 2S_{n-2} + 4, \quad 2^n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2} - 4,$$

és a kapott kifejezéseket $S = n + 2^n - 1$ -be behelyettesítjük.

3. A (4) összefüggés meglepően hasonlít a sorozat képezési utasítására. Ezt a (2) és (3) „zárt alakokkal” végzett számítás nélkül úgy is beláthatjuk, ha a

$$\begin{array}{rcl} c_{n-1} & = & 3c_{n-2} - 2c_{n-3} \\ c_{n-2} & = & 3c_{n-3} - 2c_{n-4} \\ & \dots\dots\dots & \\ c_2 & = & 3c_1 - 2c_0 \\ c_1 & = & 3c_0 - 3 \\ c_0 & = & 2 \end{array}$$

egyenlőségeket oszloponként összeadjuk.

4. A dolgozatok nagy része gépies munkával S_n -nel azt az összeget jelölte, melynek legnagyobb indexű tagja c_n – holott ennek jele az adott szöveg szerint S_{n+1} – és következésképpen (3) helyett $S_n = 2^{n+1} + n$ -et kaptak. Ezeket is elfogadtuk, megjegyezzük azonban, hogy körültekintő olvasónak különösen a „szokatlan” dolgokra – mint itt a sorozat 0-indexű tagjára, fel kell figyelnie. Még több az olyan dolgozat, amely nem tesz megjegyzést arról, hogy (3) nemcsak $k \geq 2$ -re érvényes. (A (2)-t előállító megfontolásokban ugyanis felhasználták az adott összefüggést, amelynek $k = 0$ és 1-gyel nincs értelme.)