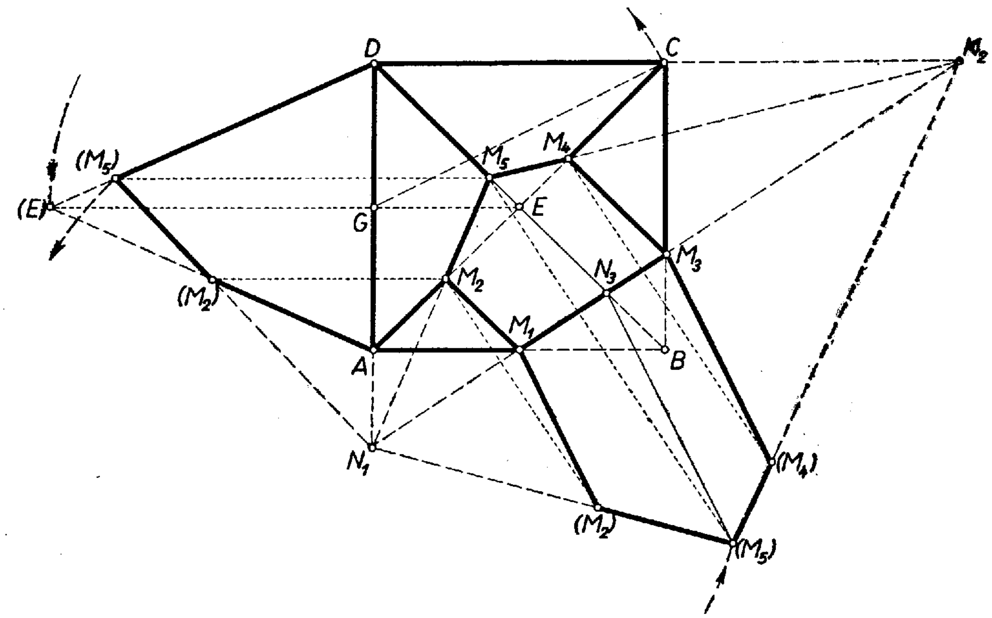
Az 1014. feladat jelöléseivel G oldallapjainak magassága $EM_2 = a\sqrt{5}/2$, és így területe $t = a^2\sqrt{5}/4$, az oldalél hossza pedig hasonlóan $AE = c = a\sqrt{6}/2$.



Az oldallapokon a metszéssel előállt kisebb háromszögek területét egyszerűen kapjuk a következő nyilvánvaló segédtétel alapján. Ha az XY, XZ fél egyeneseken Y_1, Z_1 olyan pontok, amelyekre $XY_1 : XY = \lambda$ és $XZ_1 : XZ = \lambda_1$, akkor az XY_1Z_1 háromszög területe $\lambda\lambda_1$-szerese az XYZ háromszög területének. Így az ABE oldallap T_1-re eső AM_2M_1 háromszögének területe $t/2 \cdot 2 = t/4$, ennélfogva a T_2-re eső BEM_1M_2 rész területe $3t/4$. Hasonlóan a BCE, CDE, DAE oldallapok T_1, ill. T_2-re eső részének területe rendre $4t/9$ és $5t/9$, $14t/15$ és $t/15$, végül $9t/10$ és $t/10$, így G-nek $4t$ palástfelszínéből T_1-re esik $91t/36 = 91a^2\sqrt{5}/144$, T_2-re pedig $53t/36 = 53a^2\sqrt{5}/144$. Az alaplap megfelelő részeinek területe (lásd 1014-ben) $11a^2/12$, ill. $a^2/12$.

A T_1 és T_2 mindegyikének lapját adó $M_1M_2M_3M_4M_5 = Q$ síkmetszet $M_1M_2N_3M_5 = Q_1$ és $M_5N_3M_3M_4 = Q_2$ részei trapézok, mert a 966. feladat szerint M_1M_2, M_4M_3 és M_5N_3 mindegyike párhuzamos BE-vel, és így egymással is. Q_1 és Q_2 magasságainak $h_1 : h_2$ aránya nyilván egyenlő az $M_2N_3 : N_3M_3$ aránnyal; ez pedig a háromszög szögfelezője által létesített szakaszok arányára ismert tétel alapján egyenlő az $M_2B : BM_3$ aránnyal, ugyanis BN_3, mint az alapnégyzet BD átlójának része, felezi az M_2BM_3 háromszög B-nél levő szögét. Az adatok szerint $M_2B : BM_3 = 3/2$, tehát $h_1 : h_2 = 3/2$.

Q_1 és Q_2 párhuzamos oldalainak hossza $M_1M_2 = m_1 = c/2$, $M_4M_3 = 2c/3$ és $M_5N_3 = m_6 = 4c/5$, így a középvonal hossza Q_1-ben $k_1 = 13c/20$, Q_2-ben $k_2 = 11c/15$, és ebből arányuk $k_1 : k_2 = 39/44$.

Ezek szerint Q területének megállapítása céljára elég Q_1 és Q_2-nek $t_1 = k_1h_1$, ill. $t_2 = k_2h_2$ területe közül egyiket kiszámítani, mert a másik a

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{k_1h_1}{k_2h_2} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{39}{44} \cdot \frac{3}{2} = \frac{117}{88}$$

arány alapján kifejezhető. Innen Q területe $t_1 + t_2 = 205\,t_1/117$.

t_1 kiszámításához elegendő, ha még meghatározzuk M_2N_3 és M_1M_5 szárait. Az eddigiekből nyilván $M_2N_3 = 3M_2M_3/(3+2) = a\sqrt{13}/10$, mert $M_2M_3 = a\sqrt{13}/6$. – M_1M_5-öt tekintsük azon téglatest egyik testátlójának, melynek 2 lapsíkja párhuzamos $ABCD$ síkjával, további 2–2 lapsíkja merőleges AB-re, ill. AD-re, és mindhárom párhuzamos síkpár egyik tagja M_1-en, másik tagja M_5-ön megy át. Az $ABCD$-vel párhuzamos síkok távolsága, a téglatest egyik éle, nyilván M_1 és M_5 magasságkülönbségével egyenlő, ami az idézett eredmények ill. adat szerint $4a/5 - a/2 = 3a/10$. A további két síkpár távolsága – gondolva E, M_1, M_5-nek AB-re, ill. AD-re vett vetületére, melyek közül E vetülete felezi az illető élt –

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{10} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{20}, \quad \text{ill.} \quad \frac{a}{4} + \frac{a}{10} = \frac{7a}{20}.$$

Ezekkel

$$M_1M_5 = \sqrt{\left(\frac{3a}{10}\right)^2 + \left(\frac{3a}{20}\right)^2 + \left(\frac{7a}{20}\right)^2} = \frac{a\sqrt{94}}{20}.$$

Messe most már M_5N_3-at az M_1-en át M_2N_3-mal húzott párhuzamos N-ben (1014. fd. 1. ábra), tehát a fentiekből $M_5N = m_6 - m_1 = 3c/10 = 3a\sqrt{6}/20 = a\sqrt{54}/20$, másrészt $M_1N = M_2N_3 = a\sqrt{13}/10 = a\sqrt{52}/20$. Vegyük észre, hogy az M_1M_5N háromszög oldalai arányosak $\sqrt{94}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{52}$-vel. Az ezekkel mint oldalakkal szerkesztett háromszög területe a Heron-képlet beszorzással előálló

$$16t^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

alakjából $\sqrt{11088}/4=\sqrt{144\cdot 77}/4=3\sqrt{77}$. Ezért az M_1M_5N háromszög területe $3a^2\sqrt{77}/400$, és így az M_5N alaphoz tartozó magassága $h_1=a\sqrt{77}/10\sqrt{6}$. És mivel $k_1=13c/20=13a\sqrt{6}/40$, azért a Q síkmetszet területe:

$$\frac{205t_1}{117}=\frac{205k_1h_1}{117}=\frac{41a^2\sqrt{77}}{720}\approx 0{,}4996a^2.$$

Mindezek alapján T_1 és T_2 felszíne

$$F_1=\frac{a^2}{720}(455\sqrt{5}+660+41\sqrt{77})\approx 2{,}289a^2,$$
$$F_2=\frac{a^2}{720}(265\sqrt{5}+60+41\sqrt{77})\approx 1{,}406a^2.$$

Hajna János (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A koszinusz-tétel felhasználásával az ADE háromszögből $\cos AED\sphericalangle=(2c^2-a^2)/2c^2=2/3$, és így az M_1EM_5 háromszögből rövidebben,

$$M_1M_5=\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{25}-2\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{47c^2}{300}=\frac{47a^2}{200}.$$

Hasonlóan az ACE és M_1M_4E háromszögekből ez az egyszerű eredmény adódik: $M_1M_4=a\sqrt{6}/4=c/2=M_1M_2$.

Klimó János (Kaposvár, közg. techn. IV. o. t.)

2. Q területét úgy is megkaphatjuk, hogy az $N_1N_2M_5$ háromszög területéből kivonjuk az $N_1M_2M_1$ és $N_2M_3M_4$ háromszögek területének összegét. Vázoljuk ezt a számítási lehetőséget.

A DN_1N_2 háromszögből $N_1N_2^2=52a^2/9$; az oldallapoknak az alapélen levő szögére $\cos ADE\sphericalangle=a/2c=1/\sqrt{6}$; így N_1DM_5-ből (vagy ismét a térbeli Püthagorász-tétellel) $N_1M_5^2=376a^2/225$, N_2DM_5-ből $N_2M_5^2=84a^2/25$, így $N_1N_2M_5$ területe $2a^2\sqrt{77}/15$ (Heron).

A levágandó $N_1M_2M_1$ háromszög hasonló $N_1N_3M_5$-höz, $N_2M_3M_4$ pedig $N_2N_3M_5$-höz, $N_1N_3:N_1M_2=8:5$, $N_2N_3:N_2M_3=6:5$, így $M_1N_1=5M_5N_1/8$, $M_4N_2=5M_5N_2/6$, továbbá $M_2N_1=N_1N_2/4$, $M_3N_2=N_1N_2/2$. Ezekből fenti segédtételünk alapján a levágandó háromszögek területe 5/32, ill. 5/12 része $N_1N_2M_5$ területének, együtt 55/96 része, tehát Q-ra 41/96 rész marad vissza, ami ismét $41a^2\sqrt{77}/720$.

3. Elsősorban az ábrázoló geometriában jártas versenyzőink számára – de valamennyi olvasónknak is – ajánljuk ábránk tanulmányozását. Ezen az alapsíkba (K_1-be) forgatva látják az ADE oldallapot és az $N_1N_2M_5$ háromszöget, az utóbbihoz az $AD(E)$-ben adódott (M_5)-at használtuk fel, (E)-hez pedig azt, hogy a GE oldalmagasság GE és GD vetületének egyenlősége folytán egyenlő GC-vel. – A dolgozatok jórésze több vetítéssel, hosszas meggondolásokkal lényegében hasonló, de hosszabb utakon jutott eredményhez.