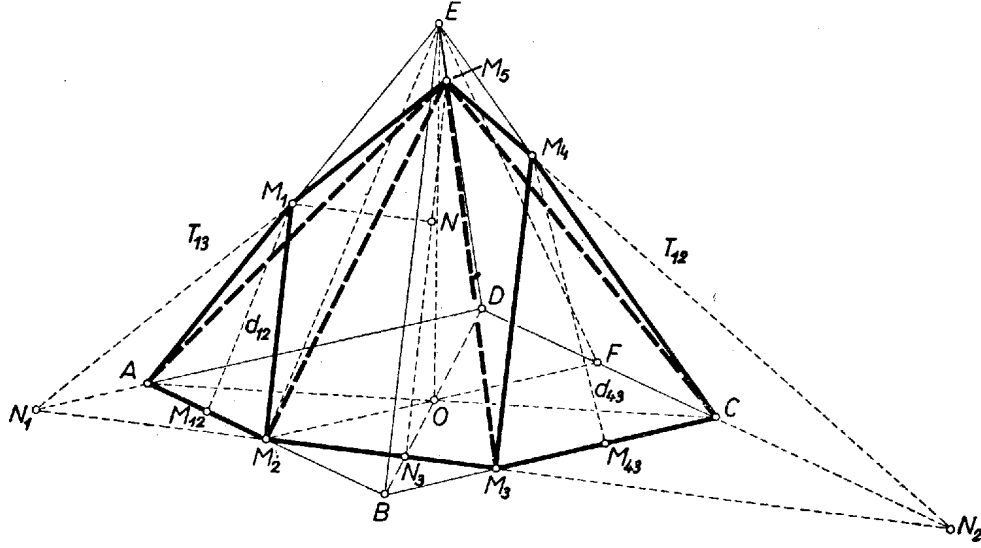


I. megoldás: Jelöljük az $M_2M_3CDAM_1M_5M_4 = T_1$ rész-test térfogatát V_1 -gyel, az $M_2BM_3M_4M_5M_1E = T_2$ rész-test térfogatát V_2 -vel. Elég pl. V_1 -et önállóan kiszámítani, mert V_1 és V_2 összege egyenlő az eredeti $ABCDE = G$ gúla $V = a^3/3$ térfogatával, ahol a az alapél és a magasság közös hosszát jelöli.



1. ábra

Az ajánlott $M_5AM_2M_3CD = T_{11}$ gúla része T_1 -nek, úgy áll elő, hogy T_1 -et egyrészt a C, M_3, M_5 , másrészt az A, M_2, M_5 csúcsokon átmenő sikkal metsszük. A lemetsett $CM_3M_5M_4 = T_{12}$ és $AM_2M_5M_1 = T_{13}$ részek háromoldalú gúlák. Eszerint V_1 -et T_{11}, T_{12} és T_{13} -nak V_{11}, V_{12}, V_{13} térfogatából összeadással kaphatjuk.

T_{11} alapja az $ABCD$ négyzetből a BM_3M_2 derékszögű háromszög lemettségével áll elő, amelyben $BM_2 = a/2$, $BM_3 = a/3$, így az alap területe $a^2 - a^2/12 = 11a^2/12$. T_{11} magassága az idézett eredmény szerint nyilvánvalóan $4a/5$, ennél fogva $V_{11} = 44a^3/180 = 11a^3/45$.

V_{13} kiszámításához vegyük T_{13} alapjának az AM_2M_1 háromszöget, ekkor a testmagasság M_5 -nek az AM_2M_1 -et tartalmazó ABE laptól való d_{52} távolsága. Az AM_2M_1 lap területének számításához alapnak AM_2 -t véve a magasság M_1 -nek AM_2 -től való $M_1M_{12} = d_{12}$ távolsága. Így a feltevésre tekintettel

$$(1) \quad V_{13} = \frac{1}{2} AM_2 \cdot d_{12} \cdot \frac{1}{3} d_{52} = \frac{AM_2}{6} \cdot d_{12} d_{52} = \frac{a}{12} \cdot d_{12} \cdot d_{52}.$$

Az idézett eredmények szerint d_{12} egyenlő az ABE háromszög EM_2 magasságának felével. E magasság hossza nyilván $a\sqrt{5}/2$, tehát $d_{12} = a\sqrt{5}/4$. – Másrészt d_{52} annak a távolságnak 5-ödrésze, amennyire D (vagy a DC él bármely pontja) van az ABE laptól. Könnyen számíthatjuk ezt mint a CD él F felezőpontjának EM_2 -től való távolságát, mert ez az EM_2F háromszög F -ből húzott magassága. E háromszög t területének kétféle kifejezéséből – az alap középpontját O -val jelölve –

$$5d_{52} = 2t/EM_2 = M_2F \cdot EO/EM_2 = a^2/(a\sqrt{5}/2) = 2a/\sqrt{5},$$

ennél fogva $d_{52} = 2a/5\sqrt{5}$, és végül

$$V_{13} = \frac{a}{12} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2a}{5\sqrt{5}} = \frac{a^3}{120}.$$

Hasonlóan

$$(2) \quad V_{12} = CM_3 \cdot d_{43} \cdot d_{53}/6 = d_{43} \cdot d_{53} \cdot a/9,$$

ahol $d_{43} = M_4M_{43}$ az M_4 távolsága CM_3 -től, és d_{53} az M_5 távolsága a CM_3M_4 , azaz CBE laptól. Itt nyilván $d_{43} = 2EM_2/3 = a\sqrt{5}/3$, és $d_{53} = d_{52}$, tehát

$$V_{12} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2a}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{9} = \frac{2a^3}{135}.$$

Mindezek alapján

$$V_1 = V_{11} + V_{12} + V_{13} = a^3 \left(\frac{11}{45} + \frac{2}{135} + \frac{1}{120} \right) = \frac{289a^3}{1080},$$

ebből pedig az előrebecsátottak szerint

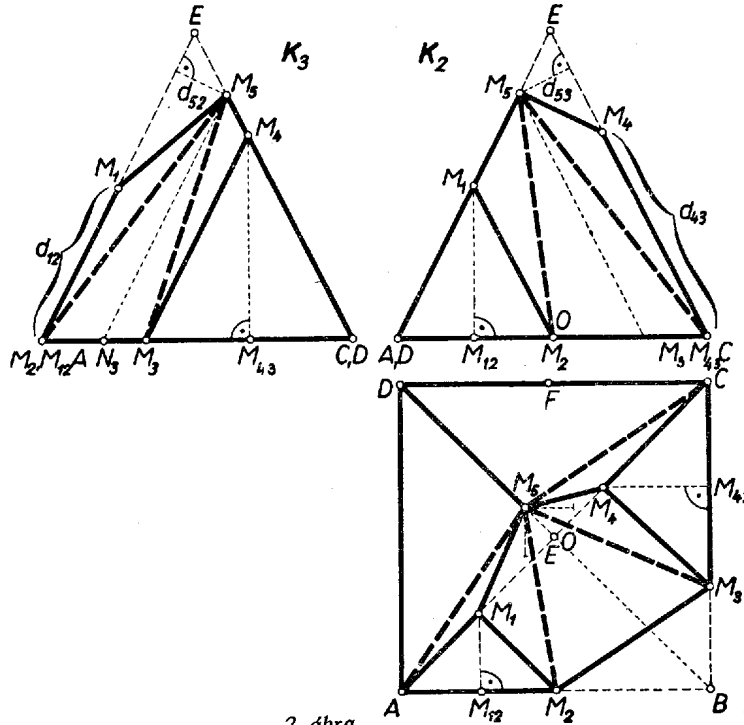
$$V_2 = V - V_1 = \frac{a^3}{3} - \frac{289a^3}{1080} = \frac{71a^3}{1080}.$$

(Mint látjuk, V_2 valamivel kisebb $V_1/4$ -nél.)

Marton Katalin (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2) céljára elég a $d_{12} \cdot d_{52}$, ill. $d_{43} \cdot d_{53}$ szorzat értékét a -val kifejeznünk. Az utóbbi szorzat megállapítható G és T_1 -nek egy a CB élre merőleges K_2 síkon adódó vetületéből. E vetületben d_{43} és d_{53} valódi nagyságukban látszanak, mert mindkét szakasz merőleges CB -re és így párhuzamos K_2 -vel. Másrészt egyik oldalát és hozzátartozó magasságát adják az M_{43} , M_4 , M_5 csúcsok vetületei által alkotott háromszögnek, így szorzatuk e háromszög 2-szeres területét adja. Ez a terület úgy is kiszámítható, hogy összehasonlítjuk annak a háromszögnek a területével, amelyet a G test A , C , E csúcsainak ugyancsak K_2 -re való vetületei határoznak meg. E háromszög területe, AC vetületét véve alapnak, $a^2/2$, mert alapja és magassága a . Ha pedig CE vetületét vesszük alapnak, ennek d_{43} vetülete a 966. feladat idézett eredményei szerint $2/3$ része, az A vetületéből húzott magasságnak pedig az M_5 vetületéből húzott d_{53} magasság $1/5$ része. Eszerint a vetületbeli $M_{43}M_4M_5$ háromszög területe $a^2/15$, a vizsgált szorzat $2a^2/15$, végül ismét

$$V_{12} = (a/9) \cdot (2a^2/15) = 2a^3/135.$$



Hasonlóan G és T_1 -nek egy az AC élre merőleges K_3 síkon előáll vetületéből az idézett eredmények alapján (lásd a 2. ábrát)

$$d_{12} \cdot d_{52} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{a^2}{10}, \quad \text{és így} \quad V_{13} = \frac{a^3}{120}.$$

2. Ajánljuk olvasóinknak, hogy térbeli feladatok megoldásában próbálják meg segítségül venni az ábrázoló geometria rajzoló módszereivel előállított vetületeket. A fentihez hasonló megfontolásokban, a képeknek az eredeti jelentéstől kissé eltávolodó értelmezésében azonban fokozott óvatosságot tanúsítsunk! Ilyet látunk a következő megjegyzésben is.

3. Egyrészt a DN_3 szakaszon, másrészt rendre az M_1 , M_5 , M_4 ponton át fektetett síkokkal T_1 -et négy részre vágva is kiszámíthatjuk V_1 -et. Az egymás utáni részek: az N_3DAM_2 alapú, M_1 csúcsú, négyoldalú gúla, a közös N_3DM_5 alapú és M_1 , ill. M_4 csúcsú háromoldalú gúla és az N_3DCM_3 alapú M_4 csúcsú gúla.

Az első és a negyedik gúla alapterülete az 1015. feladat segédterületének felhasználásával $9a^2/20$, ill. $7a^2/15$, a megfelelő magasságok $a/2$, ill. $2a/3$, így a térfogatok $3a^3/40$, ill. $14a^3/135$. A 2-ik és 3-ik gúla térfogatának összege egyszerre számítható: a mondott közös alap területe $16/25$ része a DBE háromszög $a^2/\sqrt{2}$ területének: $8a^2\sqrt{2}/25$, a két magasság összege pedig egyenlő az M_1M_4 szakasznak a K_1 alapsíkon levő vetületével $5a\sqrt{2}/12$ -vel. Tehát az együttes térfogat $4a^3/45$. E három térfogat összege a fenti V_1 .

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás: Részekre bontás nélkül, kiegészítéssel számíthatjuk V_1 -et, ha T_1 -hez hozzávesszük az AM_2N_1 alapú, M_1 csúcsú és a CM_3N_2 alapú, M_4 csúcsú háromoldalú gúlát. Így a DN_1N_2 alapú, M_5 csúcsú háromoldalú gúla

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{3} \cdot 2a \frac{4a}{5} - \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{2a}{3} \cdot a \frac{2a}{3} \right) = \frac{289a^3}{1080}.$$

III. megoldás: Számítsuk ki önállóan V_2 -t abból, hogy T_2 -t az M_2M_3E síkkal metszve két olyan gúlát kapunk, melyek közös csúcsa E , alapjuk pedig M_2M_3B és $M_1M_2M_3M_4M_5$. Ezek területe $a^2/12$, ill. az 1015. feladat megoldása szerint $41a^2\sqrt{77}/720$. Az első gúla magassága a , így térfogata $a^3/36$. A második gúla magassága E -nek, vagy ami ugyanaz, a BE élnek a metsző S -től való távolsága. Ennek meghatározására messük T_2 -t a BE -re merőleges síkkal. A síkmetszet oldalai egyenlők az M_2M_1 és BE , a BE és M_3M_4 , ill. az M_2M_1 és M_3M_4 párhuzamosok távolságával. Az első nyilván fele, a második pedig harmada az ABE háromszögben a BE alaphoz tartozó $a\sqrt{30}/6$ magasságnak, vagyis $a\sqrt{30}/12$, ill. $a\sqrt{30}/18$; a harmadik pedig az 1015. feladat megoldása szerint $h_1 + h_2 = 5h_1/3 = a\sqrt{462}/36$. Ezekből a metszet területe (a Heron-képlet beszorzással adódó alakjából) $a^2\sqrt{6}/36$, és a harmadik oldalhoz tartozó magassága, a keresett távolság $2a/\sqrt{77}$. Most már az $EM_1M_2M_3M_4M_5$ gúla térfogata $41a^3/1080$ és a két gúla térfogatának összege $V_2 = 71a^3/1080$.

Frint Gábor (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Megjegyzés. T_2 -t az N_3BEM_5 síkkal kettévágva két ferdén lemetezett háromoldalú hasábot kapunk. Könnyű belátni, hogy ilyen hasáb térfogatát az oldalélekre merőleges keresztmetszetnek az oldalélek számtani közepével való szorzata adja (pl. a legrövidebb oldalél egyik végpontján át a másik véglappal párhuzamos metszéssel a test egy hasábra és egy trapéz alakú gúlára bontható; másképpen pedig egy trapéz és egy háromszög alapú gúlára). Az $M_2BN_3M_5M_1E$ hasáb keresztmetszetének területe a $h_1 : h_2 = 3/2$ arány alapján $3/5$ része a fenti megoldásban nyert $a^2\sqrt{6}/36$ keresztmetszetnek, a $BM_3N_3M_5EM_4$ hasábé pedig $2/5$ része ugyanennek. Így $-c$ -vel a $BE = a\sqrt{6}/2$ oldalélt jelölve

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2\sqrt{6}}{36} \cdot \frac{1}{3} \left(c + \frac{4c}{5} + \frac{2c}{2} \right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{a^2\sqrt{6}}{36} \frac{1}{3} \left(c + \frac{4c}{5} + \frac{2c}{3} \right) = \\ &= \frac{23a^2c\sqrt{6}}{1800} + \frac{37a^2c\sqrt{6}}{4050} = \frac{71a^2c\sqrt{6}}{3240} = \frac{71a^3}{1080}. \end{aligned}$$

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)