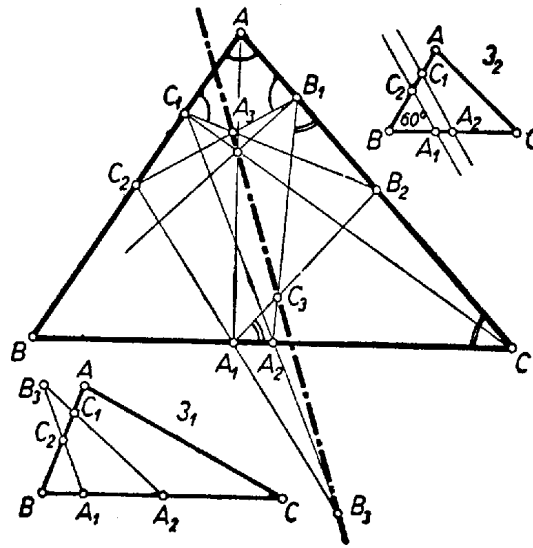
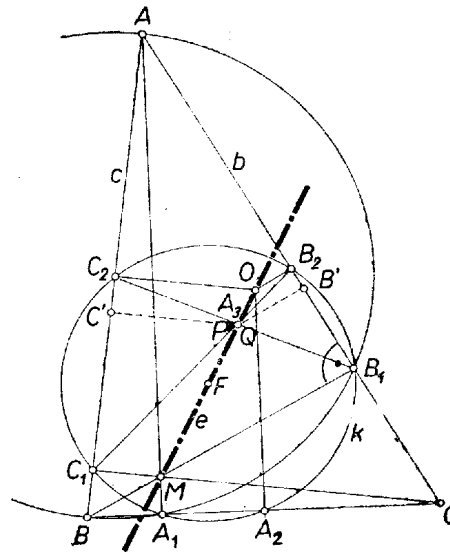


I. megoldás: Kimutatjuk, hogy ha A_3 létezik, akkor rajta van a háromszög M magasságpontját és a köré írt kör O középpontját összekötő e egyenesen (e csak szabályos ABC háromszög esetén nem létezik, mert csak ebben esik egybe O és M). Ezzel már igazoltuk az állítást, mert hasonlóan B_3, C_3 is pontja e -nek.



1. ábra

Messe az A_3 -on átmenő $AB = c$ -re merőleges egyenes AB -t C' -ben, e -t P -ben, továbbá az A_3 -on átmenő, $AC = b$ -re merőleges egyenes AC -t B' -ben, e -t Q -ban (2. ábra).



2. ábra

Azt fogjuk megmutatni, hogy P és Q egybeesik; ebből következik, hogy azonosak A_3 -mal, mert c és b nem párhuzamosak.

Minthogy M és O egyrészt a c -re C_1 és C_2 -ben, másrészt a b -re B_1 és B_2 -ben emelt merőlegesek metszéspontja, azért a b, e egyenespárt 3 párhuzamos egyenes metszi át, így

$$(1) \quad MQ : QO = B_1B' : B'B_2.$$

Hasonlóan a c, e egyenespáron levő metszetekre

$$(2) \quad MP : PO = C_1C' : C'C_2.$$

Így azt kell belátnunk, hogy (1) és (2) második arányai egyenlők.

Ehhez felhasználjuk, hogy az A_3 előállításában szereplő B_1, C_1, B_2, C_2 pontok egy körön vannak, éspedig az $A_2B_2C_2$ háromszög k körülírt körén (az ABC háromszög ún. Feuerbach-féle körén). Elég pl. B_1 -re megmutatni, hogy k -n van. Valóban, az A_2, B_2, B_1, C_1 csúcsokkal meghatározott konvex négyszög szimmetrikus trapéz, tehát körbe

írható. Ugyanis $A_2C_2 \parallel B_1B_2$, az A_2B_2 és C_2B_1 szakaszok (vagy mindkettő oldal, vagy mindkettő átló) egyenlők $AB/2$ -vel, $-C_2B_1$ azért, mert B_1 rajta van az AB átmérő fölötti Thalész-körön, melynek középpontja C_2 –, végül a négyszög általában nem paralelogramma, mert B_1 általában különbözik A és C -től, az AC egyenes azon két pontjától, amelyek A_2 , B_2 , C_2 -t paralelogrammává egészítik ki; ha pedig pl. $B_1 \equiv C$, akkor a négyszög téglalap és ezért körbe írható.

Eszerint a B_1C_2 , C_1B_2 szakaszpár a végpontjaikkal mint csúcsokkal meghatározott konvex húrnégyszögnek vagy a két átlóját adja (ilyen az 1. ábrán A_3), vagy két szemben fekvő oldalát (ilyen jellegű az 1. ábra B_3 pontja, persze minden A betűt B -re cserélve és viszont). Ezért az $A_3B_1B_2$ és $A_3C_1C_2$ háromszögek mindenképpen hasonlóak, mert szögeik rendre egyenlők (kerületi szögek, csúcshögek, közös szögek). Ennélfogva valóban áll

$$B_1B' : B'B_2 = C_1C' : C'C_2,$$

mert hasonló háromszögekben bármely megfelelő szakaszok aránya egyenlő, és itt az A_3 -ban összefutó oldalaknak a szemben levő oldalon levő vetületeiről van szó. Ezzel az állítást általában bebizonyítottuk.

Bizonyításunkat ki kell egészítenünk az olyan esetek vizsgálatával, ha a B_1 , B_2 és C_1 , C_2 párok egyike, pl. az első – egybeesik, mert ekkor $A_3 \equiv B_2 \equiv B_1$ az $A_3B_1B_2$ háromszög elfajul ponttá. Így azonban állításunk nyilvánvaló, mert ekkor az ABC háromszög egyenlő szárú: $BA = BC$, tehát e azonos a szimmetriatengellyel, és így átmegy A_3 -on. Ha pedig $B_1 \equiv B_2$ és $C_1 \equiv C_2$ akkor ABC egyenlő oldalú, A_3 , B_3 , C_3 határozatlanok.

Ha a háromszögnek csak egy szöge 60° -os, pl. α , vagy ha $\alpha = 120^\circ$, akkor – mint az 541. gyakorlatban láttuk – B_1C_2 és C_1B_2 párhuzamosak, A_3 nem létezik. Fenti bizonyításunk szerint B_3 és C_3 ekkor is e -n vannak. Megmutatjuk, hogy ilyenkor B_1C_2 és C_1B_2 párhuzamosak e -vel. Feltevésünk folytán $AB_1 = AB/2 = AC_2$, $AC_1 = AC/2 = AB_2$ és így B_1 és C_2 , valamint C_1 és B_2 egymásnak tükrös párjai az α belső, ill. külső felezőjére, ezért B_1C_2 és C_1B_2 merőlegesek e felezőre. Másrészt ugyanez áll e -re is, mert a C_1AB_1M és B_2AC_2O négyszögek egybevágók, ugyanis 2–2 megfelelő oldaluk és 3–3 megfelelő szögük egyenlő, továbbá 3–3 megfelelő csúcsuk egymásnak fenti szög felezőjére tükrös párja, tehát M és O is tükrös pár.

Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VII. o. t.)

II. megoldás: Mint az I. megoldásban láttuk, a magasságtalppontok rajta vannak az oldalfelezőpontokkal meghatározott k körön. Ha e 6 pontot az A_1 , B_2 , C_1 , A_2 , B_1 , C_2 sorrendben tekintjük egy a k -ba írt hatszög csúcsainak, akkor a szóban forgó egyenespárok 2–2 tagja e hatszögnek 2–2 szembenfekvő oldala. Ezért a kúpszeletbe írt hatszögre vonatkozó Pascal-féle tétel ¹ szerint A_3 , B_3 , C_3 metszéspontjaik egy egyenesen vannak.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. A Pascal-tétel alapján a feladat állítását abból is bizonyíthatjuk, hogy A_3 , B_3 , C_3 bármelyike, pl. ismét A_3 , rajta van az M -et a háromszög S súlypontjával összekötő egyenesen. Tekintsük az AB , AC egyenespárt elfajult k' kúpszeletnek. A $B_1BB_2C_1CC_2$ hatszög csúcsai k' -n vannak, tehát szemben fekvő oldalainak metszéspontjai: B_1B és C_1C -nek M , BB_2 és CC_2 -nek S , végül B_2C_1 , és C_2B_1 -nek A_3 – egy egyenes pontjai. (Az M , S pontokkal meghatározott egyenes azonos a fentebbi MO egyenessel, a háromszög Euler-féle egyenesével.)

¹Lásd pl. *Schopp János*: Kúpszeletek (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1955, 71. o. – *Vigassy Lajos*: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldása (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1957, 33. o.