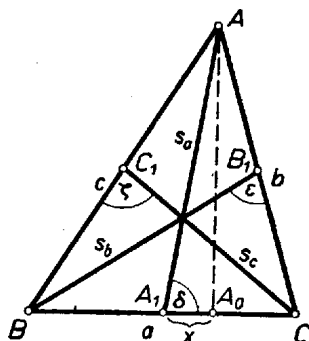


Legyenek a súlyvonalak végpontjai, vagyis az oldalak felezőpontjai rendre A_1, B_1, C_1 . $b < c$, azaz $AC < BC$ folytán A a BC oldal felező merőlegesének azon a partján van, mint C , ezért az $AA_1 = s_a$ súlyvonal a δ hegyes szöget A_1C -vel zárja be.



Az AA_1C háromszögből a koszinusz-tétellel

$$(1) \quad \operatorname{ctg} \delta = \frac{\cos \delta}{\sin \delta} = \frac{A_1A^2 + A_1C^2 - AC^2}{2A_1A \cdot A_1C \sin \delta} = \frac{s_a^2 + \frac{a^2}{4} - b^2}{4t_1},$$

ahol t_1 az AA_1C háromszög területét jelöli, ami nyilván fele az ABC háromszög t területének. s_a^2 -et kifejezhetjük a háromszög oldalaival. Ugyanis ismét az AA_1C , majd az AA_1B háromszögből $\cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta$ figyelembevételével

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + s_a^2 - as_a \cos \delta, \quad c^2 = \frac{a^2}{4} + s_a^2 + as_a \cos \delta.$$

Ezek félösszegéből

$$s_a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2},$$

és ezt, valamint a $t_1 = t/2$ kifejezést (1)-be helyettesítve

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{c^2 - b^2}{4t}.$$

Hasonlóan adódnak a

$$\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{c^2 - a^2}{4t}, \quad \operatorname{ctg} \zeta = \frac{b^2 - a^2}{4t}$$

kifejezések, és ezekből az állítás helyessége nyilvánvaló.

Gonda Júlia (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy, a koszinusz tételnek csupán látszólagos megkerülésével adódik $\operatorname{ctg} \delta$ fenti kifejezése az alábbi úton. Legyen az A -ból húzott m_a magasság talppontja A_0 és $AA_0 = x$. Ekkor $\operatorname{ctg} \delta = x/m_a$, ill. $am_a = 2t$ alapján $\operatorname{ctg} \delta = ax/2t$. Legyenek a c, b oldalak vetületei a -n $BA_0 = c_a, CA_0 = b_a$. Így ha γ hegyesszög vagy derékszög, akkor egyrészt $BA_1 = A_1C$ -ből $c_a - x = b_a + x$, így $x = (c_a - b_a)/2$, másrészt $BC = BA_0 + A_0C$ -ből $a = b_a + c_a$, ennél fogva $\operatorname{ctg} \delta$ számlálója $ax = (b_a + c_a)(c_a - b_a)/2 = (c_a^2 - b_a^2)/2 = [(c^2 - m_a^2) - (b^2 - m_a^2)]/2 = (c^2 - b^2)/2$. Ha pedig γ tompaszög, akkor $c_a - x = x - b_a$ -ból $x = (c_a + b_a)/2$ és $a = c_a - b_a$ alapján ugyanaz a kifejezés adódik. – Vegyük észre, hogy a felhasznált gondolatok ugyanazok, mint a koszinusztétel legismertebb levezetésében: a BC oldalegyenesen az A_0 talppont által létrehozott szakaszok összege vagy különbsége a BC oldalt adja, és az ABA_0, ACA_0 háromszögek derékszögei.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. III. o. t.)