

Képezzük a két oldal különbségét, igyekezve közös nevezőre hozás után a számlálót szorzattá alakítani. Hozzuk először közös nevezőre a két oldal első tagjainak különbségét, ebből megkapjuk a második tagok különbségét is, ha a helyébe c -t, b helyébe d -t írunk:

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{a+bx} - \frac{ax-b}{a-bx} &= \frac{[-abx^2 + (a^2 - b^2)x + ab] - [abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab]}{a^2 - b^2x^2} = \\ &= \frac{2ab(1-x^2)}{a^2 - b^2x^2},\end{aligned}$$

tehát egyenletünk két oldalának különbsége a következő alakban írható:

$$\begin{aligned}(2) \quad & \frac{2ab(1-x^2)}{a^2 - b^2x^2} + \frac{2cd(1-x^2)}{c^2 - d^2x^2} = \\ &= \frac{2(1-x^2)[ab(c^2 - d^2x^2) + cd(a^2 - b^2x^2)]}{(a^2 - b^2x^2)(c^2 - d^2x^2)} = \frac{2(1-x^2)(ad+bc)(ac-bdx^2)}{(a^2 - b^2x^2)(c^2 - d^2x^2)}.\end{aligned}$$

Ez a kifejezés csak ott lehet 0, ahol vagy az $1-x^2$, vagy az $ac-bdx^2$ kifejezés eltűnik, tehát csak az

$$x_{1,2} = \pm 1 \quad \text{és} \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{ac}{bd}}$$

helyeken, feltéve, hogy $ad+bc \neq 0$. E feltétel mellett tehát csak az említett 4 szám lehet gyöke az egyenletnek. Ezek mind gyökei az (1) egyenletnek, mivel a két oldal különbségére csak azonos átalakításokat alkalmaztunk, – kivéve ha szerepel köztük olyan érték, amelyre a nevező eltűnik. 4-nél kevesebb különböző gyököt kapunk akkor is, ha a gyökök közt vannak egyenlők, továbbá ha ac és bd ellenkező előjelű, mert ekkor $ac-bdx^2$ nem tűnik el a valós számok körében. Meg kell vizsgálnunk, hogy a, b, c, d milyen értékei mellett fordulhatnak elő ezek az esetek.

Egyelőre feltesszük, hogy a paraméterek egyike sem 0. Az $ad+bc=0$ esetben (2) bármely olyan x -szel eltűnik, amely mellett van értelme, és így (1) elfajul azonossággá. Valóban, ekkor $ad = -bc$ -ből $d/b = -c/a = k (\neq 0)$, így $d = bk$, $c = -ak$, ezért

$$\frac{cx+d}{c+dx} = \frac{-akx+bk}{-ak+bkx} = \frac{-k(ax-b)}{-k(a-bx)} = \frac{ax-b}{a-bx},$$

ugyanígy

$$\frac{cx-d}{c-dx} = \frac{ax+b}{a+bx},$$

vagyis a jobb oldal két törtje (fordított sorrendben) azonos a bal oldal egy-egy törtjével. – Ha fennáll $ad+bc=0$, akkor az ad és bc szorzatok ellentett előjelűek, így a két tényező előjele egyikükben megegyező, másikukban ellentétes, tehát a, b, c, d között vagy 3 pozitív, vagy pedig 3 negatív szám szerepel.

Nem fogadhatjuk el megoldásnak a $\pm a/b$ és a $\pm c/d$ számokat, mert ezek mellett (1)-ben legalább egy tört kifejezésnek nincs értelme.

Az $x_1 = 1$ érték akkor egyenlő a kizárt értékek valamelyikével, ha $a = \pm b$, vagy $c = \pm d$, azaz $a \pm b = 0$, vagy $c \pm d = 0$, ill. a négy esetet összefoglalva, ha $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = 0$; minden ilyen esetben – és csak ezen esetekben – $x_2 = -1$ is kizárt érték.

Hasonlóan akkor áll be az

$$x_3 = +\sqrt{\frac{ac}{bd}} = \frac{a}{b}, \text{ vagy } -\frac{a}{b}, \text{ ill. } \frac{c}{d}, \text{ vagy } -\frac{c}{d}$$

egyenlőségek bármelyike, ha $ad = bc$, és e feltétel teljesülése esetén x_4 is kizárt érték, ugyanis pl. $\sqrt{ac/bd} = a/b$ -ből négyzetreemeléssel és osztással $c/d = a/b$, vagyis $bc = ad$.

$x_{3,4}$ akkor különböző $x_{1,2}$ -től ha $ac/bd \neq 1$.

Összefoglalva: ha a, b, c, d mindegyike 0-tól különböző, akkor (1) gyökei:

$$x_{1,2} = \pm 1, \quad \text{ha} \quad ad+bc \neq 0 \quad \text{és} \quad (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \neq 0, \quad \text{továbbá}$$

$x_{3,4} = \pm \sqrt{ac/bd}$, ha az ac/bd hányados 1-től különböző, pozitív szám és $ad \neq bc$.

Eredményeink akkor is érvényesek, ha a paraméterek számára megengedjük a 0-értéket. Így is csak egyikük lehet 0, ugyanis ha legalább kettőjük 0, akkor vagy (1) értelmetlen – ha ti. $a = b = 0$, vagy $c = d = 0$ –, vagy (2) szerint (1) elfajul azonossággá – ha ti. $a = c = 0$, vagy $b = d = 0$, ill. $a = d = 0$, vagy $b = c = 0$, mert így $ad+bc=0$. – Ha már most pl. $a = 0$ és $bcd \neq 0$, ez $x_{1,2}$ -t nem befolyásolja; viszont $x_{3,4} = 0$, de ez nem gyök, mert így az $a/b = 0$ szám meg nem engedett érték; a $c = 0$, $abd \neq 0$ eset lényegében ugyanilyen. Ha pedig $b = 0$ és $acd \neq 0$ (vagy $d = 0$ és $abc \neq 0$), akkor (2)-ből csak $x_{1,2} = \pm 1$, ha $c^2 \neq d^2$.