

Az állítást r szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $r = 1$ -gyel az állítások a sorozatpár $k + 1$ -edik tagjainak új értelmezését ismétlik meg, tehát helyesek. Feltesszük, hogy valamely $r = s$ értékre (1) helyes, vagyis

$$(2) \quad x_{k+s} = x_s y_k + y_s x_k \quad \text{és} \quad y_{k+s} = y_s y_k + 2x_s x_k,$$

és bebizonyítjuk, hogy helyes r helyén $s + 1$ -gyel is.

Az új értelmezés szerint, majd a (2) indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned} x_{k+(s+1)} &= x_{(k+s)+1} = x_1 y_{k+s} + y_1 x_{k+s} = x_1 (y_s y_k + 2x_s x_k) + y_1 (x_s y_k + y_s x_k) = \\ &= (x_1 y_s + y_1 x_s) y_k + (y_1 y_s + 2x_1 x_s) x_k, \end{aligned}$$

és felismerve, hogy az utolsó alak zárójeles kifejezései x_{s+1} , ill. y_{s+1} -gyel egyenlők, adódik

$$x_{k+(s+1)} = x_{s+1} y_k + y_{s+1} x_k,$$

vagyis (2) első állítása helyes. – Hasonlóan

$$\begin{aligned} y_{k+(s+1)} &= y_{(k+s)+1} = y_1 y_{(k+s)} + 2x_1 x_{k+s} = y_1 (y_s y_k + 2x_s x_k) + 2x_1 (x_s y_k + y_s x_k) = \\ &= (y_1 y_s + 2x_1 x_s) y_k + 2(x_1 y_s + y_1 x_s) x_k = y_{s+1} y_k + 2x_{s+1} x_k. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Rohrböck Krisztina (Budapest, Móricz Zs. g. IV. o. t.-Lorántffy Zs. út)

Megjegyzés. Néhány dolgozat annak megmutatásával vélte bebizonyítani az állítást, hogy ha x_k , y_k , és x_r , y_r a szóban forgó sorozatpárnak ugyanazon sorszámú tag-párjai, és így megvan az 539. gyakorlatban bebizonyított tulajdonságuk: kielégítik a $2x^2 + 1 - y^2 = 0$ egyenletet –, akkor ez a tulajdonsága megvan a belőlük képezett $x_r y_k + y_r x_k$, $y_r y_k + 2x_r x_k$ számpárnak is:

$$\begin{aligned} 2(x_r y_k + y_r x_k)^2 + 1 - (y_r y_k + 2x_r x_k)^2 &= 2x_r^2 y_k^2 + 2y_r^2 x_k^2 + 1 - y_r^2 y_k^2 - 4x_r^2 x_k^2 = \\ &= 2x_r^2 (y_k^2 - 2x_k^2) + y_r^2 (2x_k^2 - y_k^2) + 1 = (y_k^2 - 2x_k^2)(2x_r^2 - y_r^2) + 1 = 1 \cdot (-1) + 1 = 0. \end{aligned}$$

E meggondolásnak lényeges hiánya az, hogy feltételezi a következő állítás helyességét: „minden a $2x^2 + 1 - y^2 = 0$ egyenletet kielégítő egész számpár tagjai ugyanazon sorszámúval szerepelnek a szóban forgó sorozatpárban”, más szóval azt, hogy az 539. gyakorlat állítása megfordítható. A hiányt pótolni sem lehet, mert az állítás nem igaz, a mondott egyenletet pl. a 0; 1 számpár is kielégíti, továbbá a 2; -3, a -2; 3 párok is.