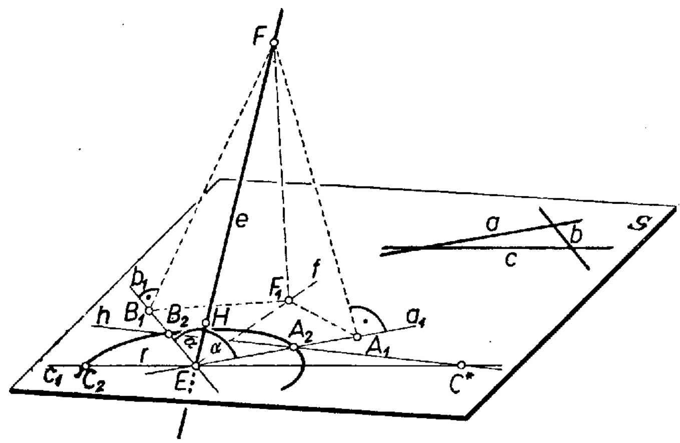
Előzetes megjegyzés. Sem a háromszög a, b, c oldalegyenesein, sem a kérdéses e egyenesen nincs szó irányításról. Így két egyenes szögén mindig azt a kisebb forgást érthetjük, amely egyiküket a közös pontja körül a másikba, ill. kitérő egyenesek esetében egy tetszés szerinti pontja körül a másikkal párhuzamos helyzetbe átviszi. Ez a forgás általában hegyes szög, legfeljebb derékszög.

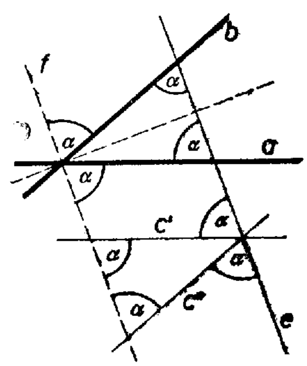
I. megoldás: Az e egyenes nem fekhet a háromszög S síkjában és azzal párhuzamos sem lehet. Ha ugyanis e az S-ben feküdnék, akkor a és b-vel alkotott egyenlő α szögei alapján vagy azonos, vagy párhuzamos lenne az a és b egyenesek szögfelezőinek egyikével, f-fel (1. ábra, α hegyes szög, mert fele az a, b oldalegyenesek valamelyik szögének).



1. ábra

Így c is α szöget alkotna f-fel. Ámde egy egyenessel a síkban csak két irány alkot egy adott hegyesszöget, esetünkben f-fel a és b irányai. Eszerint c párhuzamos lenne a és b egyikével, tehát nem alkotna velük háromszöget. – Ha pedig e párhuzamos volna az S síkkal, akkor S-nek bármely az e-vel párhuzamos e_1 egyenese is egyenlő szöget alkotna a, b, c-vel, amiről már láttuk, hogy lehetetlen.

Ezek szerint e metszi S-et egy E pontban. Toljuk el a, b, c-t (S-ben) úgy, hogy új a_1, b_1, c_1 helyzetükben menjenek át E-n (2. ábra).



2. ábra

Így e az a_1, b_1, c_1-gyel is α szöget alkot. – c_1-et átmenetileg mellőzve megmutatjuk, hogy e benne van azon két síknak egyikében, amelyek merőlegesek S-re és azt a_1, és b_1 egy-egy szögfelezőjében metszik. Bocsássunk merőlegest e-nek egy E-től különböző F pontjából a_1-re, b_1-re és S-re, legyenek talppontjaik A_1, B_1, F_1. Ha e három talppont és E közül bármelyik kettő egybeesik, akkor e merőleges S-re és segédtételünkre nincs szükség. Amennyiben ugyanis F_1 azonos E-vel, akkor e azonos az S-re merőleges FF_1-gyel; az $A_1 \equiv E$ (és hasonlóan a $B_1 \equiv E$) feltevés azt jelenti, hogy e azonos az a_1-re merőleges FA_1-gyel, így α derékszög, tehát a feltevésnél fogva e merőleges S-nek a_1 és b_1 (egymástól különböző) egyeneseire; erre vezet az $A_1 \equiv B_1$ feltevés is, mert így A_1 és B_1 azonos a_1 és b_1 egyetlen közös pontjával E-vel; végül az $F_1 \equiv A_1$, (vagy $F_1 \equiv B_1$) egybeesés feltevése – ha feltesszük, hogy A_1, B_1 és E különbözők – ellentmondásra vezet, ugyanis így S-nek F-től való távolsága FA_1, és S-nek minden az A_1-től különböző pontja F-től nagyobb távolságra van FA_1-nél, viszont a közös átfogójú FEA_1, és FEB_1, derékszögű háromszögek egybevágók, mert E-nél levő szögeik egyenlők, és ezért $FB_1 = FA_1$. – Ha az A_1, B_1, F_1 talppontok különbözők, akkor F_1 rajta van a_1 és b_1 egyik szögfelezőjén. Ugyanis az FEA_1 és FEB_1 háromszögekből ismét $FB_1 = FA_1$, így a közös befogójú FF_1A_1 és FF_1B_1 derékszögű háromszögek egybevágók, így $F_1A_1 = F_1B_1$, ez pedig igazolja állításunkat, mert szerkesztésnél fogva F_1A_1 merőleges a_1-re és F_1B_1 merőleges b_1-re. Ezek szerint e-nek S-en való vetülete az $EF_1 = f$ szögfelező, és fordítva: e valóban az f-en át S-re merőlegesen álló S_1 síkban van.

Eredményünk szerint e az a_1, c_1, egyenespár egyik g szögfelezőjén át S-re merőlegesen álló S_2 síkban is benne van. Ámde az a_1, c_1, egyenespár mindkét szögfelezője különbözik az a_1, b_1 pár mindkét szögfelezőjétől, mert e felezők párhuzamosak az eredeti háromszög egy-egy belső, ill. külső szögfelezőjével, azok pedig páronként metszik egymást. Ezért S_1 és S_2, különbözők, tehát e csak S_1 és S_2 metszésvonala lehet, ez pedig az S-re E-ben emelt merőleges. Ezt kellett bebizonyítanunk.

Gagyi Pálffy András (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az a_1, b_1, metsző egyenesekhez képezett S_1 síkot a_1 és b_1 (egyik) szögfelező síkjának szokás nevezni. Könnyű belátni, hogy ennek minden pontja egyenlő távolságra van a_1 és b_1-től.

II. megoldás: Az I. megoldás jelölésével vegyünk e-n egy E-től különböző F pontot és mérjünk fel E-től a_1, b_1, c_1-re tetszés szerinti $EA_2 = EB_2 = EC_2 = r$ szakaszt, az irányokat úgy választva, hogy a FEA_2, FEB_2, FEC_2 háromszögek E-nél levő szöge egyenlő legyen. Így e háromszögek egybevágók (két-két oldal és a közbezárt szög egyenlősége folytán), tehát $FA_2 = FB_2 = FC_2$. Ennélfogva $A_2B_2C_2$ egy az F körül írt gömbön vannak, másrészt S-en, tehát F és S metszésvonalán, amely egy kör, és középpontja F-nek S-en levő F_1 vetülete. Ámde másrészt A, B, C az E körül r sugárral írt körön is rajta vannak. És mivel 3 pont a kört egyértelműen meghatározza, azért F_1 azonos E-vel, tehát e merőleges S-re.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Az előbbi jelöléseket használva tegyük fel, hogy e nem merőleges S-re, tehát a_1, b_1, c_1-gyel egyenlő *hegyesszögeket* alkot. Állítsunk e-re egy az E-től különböző H pontján át merőleges S^* síkot. Ez metszi S-et egy h egyenesben (amely eszerint merőleges e-re), h pedig a_1, b_1, c_1 közül legalább kettőt metsz, mert ezek között nincsenek párhuzamosak. Nem lehet azonban, hogy h pl. a_1-et ne messe, mert akkor h és a_1 párhuzamosak volnának, és e a h-val együtt az a_1-re is merőleges lenne, feltevésünkkel ellentétben.

Legyen h metszéspontja a_1, b_1, c_1-en A^*, B^*, C^*. [1] A HEA^*, HEB^*, HEC^* derékszögű háromszögek HE befogója közös, E-nél levő szögeik egyenlők, így egybevágók, tehát $EA^* = EB^* = EC^*$, vagyis A^*, B^*, C^* egy az E körüli k körön vannak. Ez azonban lehetetlen, mert így k-nak a h egyenessel három különböző közös pontja lenne. Feltevésünk ellentmondásra vezetett, tehát nem állhat, így e merőleges S-re.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Végső soron a következő meggondolás is arra vezet, hogy ha e nem volna merőleges S-re, vagyis a_1, b_1, c_1-re, hanem velük bezárt α szöge hegyesszög volna, akkor egy körnek és egy egyenesnek három közös pontja volna. Az e-t E-ben metsző és vele egyenlő α szögeket alkotó egyenesek mértani helye (ha az $\alpha = 90^\circ$ esetet kizárjuk), az E csúcsú, e tengelyű és α nyílásszögű forgáskúpfelület alkotóinak összessége. Ha α hegyesszög, akkor az említett kúpfelületnek (legalább) három alkotója volna S-ben: a_1, b_1, c_1. Ez pedig lehetetlen, mert így a fenti S^* által az S-ből kimetszett h-nak három közös pontja volna az S^* által a kúpfelületből kimetszett k' körrel.

Góth László (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

IV. megoldás: Az állítást a vektoralgebra módszereivel is bebizonyíthatjuk. [2] Legyenek a háromszög oldalainak vektorai (valamelyik körüljárás mentén haladva) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, eszerint

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \tag{1}$$

továbbá az oldalakkal egyenlő α szögeket bezáró egyenes egységvektora $\mathbf{e}$, eszerint $|\mathbf{e}| = 1$. Így

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{e}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{c}|}. \tag{2}$$

Szorozzuk meg (1)-et skalárisan e-vel és fejezzük ki a tagokat (2) alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} &= |\mathbf{a}|\cos\alpha + |\mathbf{b}|\cos\alpha + |\mathbf{c}|\cos\alpha = \\ &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|)\cos\alpha = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Itt az abszolút értékek pozitívok, ezért az egyenlőség csak $\cos\alpha = 0$-val vagyis $\alpha = 90^\circ$-kal teljesülhet. Ezt akartuk bizonyítani.

Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

[1] Az ábrán H úgy van véve, hogy $A^* \equiv A_2$, és $B^* \equiv B_2$.

[2] A felhasznált fogalmakat lásd pl. *Hajós–Neukomm–Surányi:* Matematikai Versenytételek II. (Középiskola Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1957. 26–30. oldal.