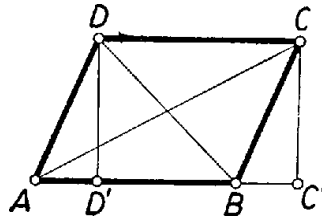


I. megoldás: Előkészítésül bebizonyítjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. Ez derékszögű paralelogrammára a Püthagorász-tétel alapján nyilvánvaló. Legyen az $ABCD$ ferdeszögű paralelogramma betűzése olyan, hogy a hegyesszögek csúcsai A és C , és az AB oldal nem kisebb AD -nél, legyen továbbá C , D (derékszögű) vetülete az AB oldalegyenesen C' , D' (1. ábra).



1. ábra

Ekkor D' az AB szakaszon van, C' pedig e szakasz B -n túli meghosszabbításán, ezért $AC' = AB + BC'$ és $D'B = AB - AD'$, továbbá $BC' = AD'$ és $AB = DC$. Így az átlók négyzetei az $AC'C$ és $BD'D$ derékszögű háromszögekből:

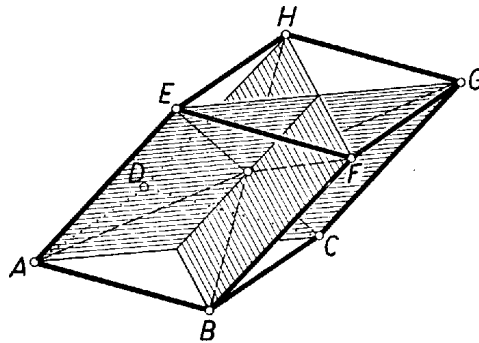
$$\begin{aligned} AC^2 &= AC'^2 + C'C^2 = AB^2 + 2AB \cdot BC' + (BC'^2 + C'C^2) = \\ &= AB^2 + 2AB \cdot AD' + BC^2, \\ BD^2 &= D'B^2 + D'D^2 = AB^2 - 2AB \cdot AD' + (AD'^2 + D'D^2) = \\ &= DC^2 - 2AB \cdot AD' + AD^2, \end{aligned}$$

tehát összegükre fennáll

$$(1) \quad AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2 + AD^2 + BC^2,$$

amit bizonyítani akartunk.

Legyen az $ABCD$ paralelogrammát alaplapként tartalmazó $ABCDEFGH = P$ paralelepipedon betűzése olyan, hogy az oldalélek AE , BF , CG és DH , tehát ezek párhuzamosak és egyenlők (2. ábra).



2. ábra

Így P testátlói az AG , BH , CE és DF szakaszok. Alkalmazzuk a fenti segédtelet P -nek $ACGE$ és $BFHD$ átlós síkmetszeteire, amelyek paralelogrammák, és átlóik az AG és CE , ill. BH és DF testátlópárok, majd adjuk össze az egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} AG^2 + CE^2 &= AC^2 + EG^2 + AE^2 + CG^2, \\ BH^2 + DF^2 &= BD^2 + FH^2 + BF^2 + DH^2, \\ S &= AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = (AC^2 + BD^2) + (EG^2 + FH^2) + \\ &\quad + (AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2). \end{aligned}$$

Itt ugyancsak a segédtelet alapján az első zárójel helyett (1) jobb oldalát, a második zárójel helyett pedig az $EFGH$ paralelogramma oldalainak négyzetösszegét írva az állítást igazoltuk, ugyanis

$$\begin{aligned} S &= (AB^2 + DC^2 + AD^2 + BC^2) + (EF^2 + HG^2 + EH^2 + FG^2) + \\ &\quad + (AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2) = \\ &= (AB^2 + DC^2 + HG^2 + EF^2) + (AD^2 + BC^2 + FG^2 + EH^2) + \\ &\quad + (AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2), \end{aligned}$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Szalay Gábor (Budapest, I. László g. III. o. t.)

II. megoldás: Az állítás vektoralgebrai úton is igazolható.¹ Legyen az A csúcsból a szomszédos B , D , E csúcsba mutató élvektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, ekkor az átlók vektorai

$$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{BH} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{CE} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{DF} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

és így négyzetösszegük:

$$\begin{aligned} S &= (AG^2 + BH^2) + (CE^2 + DF^2) = [(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{a})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})^2] + \\ &+ [(\mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a})^2] = [2(\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + 2\mathbf{a}^2] + [2(\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 + \\ &+ 2\mathbf{a}^2] = 4\mathbf{a}^2 + 2[(\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2] = 4\mathbf{a}^2 + 2[2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{c}^2] = 4(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2). \end{aligned}$$

Páska Csaba (Budapest, I. István g. III. o. t.)

¹ A felhasznált fogalmakat lásd pl. *Hajós–Neukomm–Surányi: Matematikai Versenytételek II. (Középiskolai Szakköri Füzetek)* Tankönyvkiadó, 1957. 26–30. o.