I. megoldás: A feltevésnél fogva egyik szög koszinusza sem 0, így a bizonyítandó

$$\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma > 5\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma$$

egyenlőtlenség mindkét oldalát oszthatjuk a koszinuszok szorzatával, ezért elegendő azt megmutatni, hogy

$$\text{tg }\alpha\ \text{ tg }\beta\ \text{ tg }\gamma > 5. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy a bármely nem derékszögű háromszög szögeinek tangenséből képezett összeg és szorzat egyenlők:

$$\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta+\text{tg }\gamma=\text{tg }\alpha\ \text{ tg }\beta\ \text{ tg }\gamma. \tag{2}$$

Belátható ez a tangens-függvény összeadási tételéből, az $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ összefüggésre támaszkodva, ha vesszük a

$$\text{tg }\gamma=\text{tg }\left[180^\circ-(\alpha+\beta)\right]=-\text{tg }(\alpha+\beta)=\frac{-\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}{1-\text{tg }\alpha\ \text{tg }\beta}$$

egyenlőség-sorozat szélső kifejezéseinek egyenlőségét, és azt átrendezzük.) Feltevésünknél fogva mindhárom tangens pozitív, így számtani közepük nem kisebb a mértani közepüknél:

$$\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta+\text{tg }\gamma}{3}\ge\sqrt[3]{\text{tg }\alpha\ \text{ tg }\beta\ \text{ tg }\gamma}.$$

Innen az összeget (2) alapján a szorzattal helyettesítve, majd köbreemeléssel és osztással, végül a jobb oldal csökkentésével

$$\text{tg}^2\ \alpha\ \text{tg}^2\ \beta\ \text{tg}^2\ \gamma\ge 27>25$$

adódik, ebből pedig négyzetgyökvonással (1)-re jutunk.

(Felhasználtuk, hogy két pozitív szám közül a nagyobbnak a köbe nagyobb.)

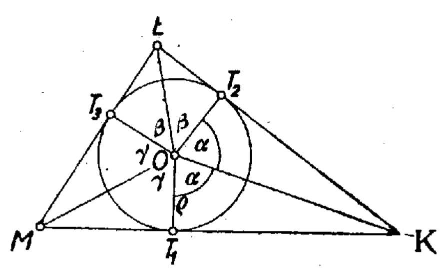
Szoboszlai Levente (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat állítása minden háromszögre érvényes. Ugyanis derékszögű háromszögekre a koszinuszok szorzata 0, tompaszögűekre pedig negatív – mert a tompaszög koszinusza negatív –, viszont a háromszög bármelyik szögének szinusza pozitív, és így ugyanez áll szorzatukra is.

Náray Szabó Gábor (Budapest, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás: Ismert tétel, hogy egy adott kör köré írt háromszögek közül a szabályos háromszögnek van a legkisebb kerülete. Ennek felhasználásával az állítás így is bizonyítható:

Legyenek egy tetszés szerinti hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ. Mérjük fel egy ϱ sugarú k kör OT_1 sugarától kezdve egymás után az α, α, β, β, γ, γ nagyságú szögeket úgy, hogy valamennyi szög csúcsa az O középpont legyen.



1. ábra

Ekkor a második γ szög második szára OT_1-be esik. Messe k-t a szomszédos α és β szögek közös szára T_2-ben, a szomszédos β és γ szögek közös szára T_3-ban. Húzzuk meg k érintőit T_1, T_2, T_3-ban. Nyilvánvaló, hogy e három érintő a szomszédos α, α, ill. β, β ill. γ, γ nagyságú szögek közös szárát páronkint ugyanazon K, ill. L, ill.M pontban metszi (1. ábra), és hogy a KLM háromszög k köré van írva, ezért $KT_1=KT_2$, $LT_2=LT_3$, $MT_3=MT_1$. A létrejött derékszögű háromszögekből

$$\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta+\text{tg }\gamma=\frac{KT_1}{\varrho}+\frac{LT_2}{\varrho}+\frac{MT_3}{\varrho}=\frac{s}{\varrho}, \tag{3}$$

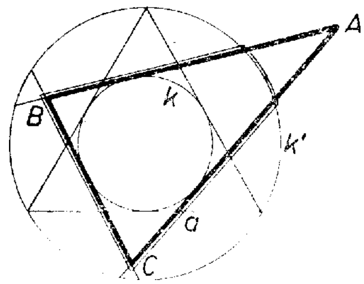
ahol s a KLM háromszög kerületének felét jelöli. Másrészt az idézett tétel szerint (a-val jelölve a k köré írható szabályos háromszög oldalát):

$$\frac{s}{\varrho}\ge\frac{3a}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{6}=3\sqrt{3}=\sqrt{27}>5,$$

amiből (2) és (3) figyelembevételével (1) adódik.

Krámli András (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A felhasznált tétel akárhány oldalú sokszögre érvényes,[1] háromszögre az alábbiak szerint látható be. $t = \varrho s$ folytán elég megmutatni, hogy adott k kör köré irt háromszögek közül a szabályos területe a legkisebb. Legyen egy k köré irt szabályos háromszög oldala a, körülírt köre (amely korcentrkus k-val) k' (2. ábra).



2. ábra

Egy a k köré írt, tetszés szerinti, nem szabályos ABC háromszög oldalegyeneseinek ugyancsak a hosszúságú húrjai esnek k'-be, így abból ugyanakkora körszeleteket és köríveket metszenek le, mint a szabályos háromszög oldalai, a körívek hossza egyenlő a kör kerületének harmadrészével. A lemetszett ívek részben fedik egymást, különben ABC szabályos háromszög volna. Ezért a lemetszett körszeletek is részben fedik egymást, így pedig az ABC háromszögnek már a k'-be eső része nagyobb területű, mint az a oldalú szabályos háromszög (éspedig annyival nagyobb, amennyi a három körszelet által kétszer lefedett terület).

[1] Lásd *Fejes Tóth László:* Körbe és kör köré írt sokszögekről. *Matematikai Lapok,* X. évf. (1959), 23–25. l.