

I. megoldás: A bal oldal két szélső tagjának, ill. két közbülső tagjának összegét a

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v} = \frac{\sin(u+v)}{\cos u \cos v}$$

azonosság alapján átalakítva egyenletünk így alakul:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x) + (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x) &= \frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = \\ &= \sin 5x \frac{\cos x \cos 4x + \cos 2x \cos 3x}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0. \end{aligned}$$

A számlálóban $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$ és $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u$ alapján

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= \cos x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \cos x [\cos 2x - (1 - \cos 2x)] = \\ &= \cos x (2 \cos 2x - 1), \\ \cos 4x &= \cos 2 \cdot 2x = 2 \cos^2 2x - 1. \end{aligned}$$

Ezek alapján $\cos x$ -szel egyszerűsítve (ami $\neq 0$, mert $\cos x = 0$ esetén $\operatorname{tg} x$ nincs értelmezve)

$$\sin 5x \frac{\cos 4x + \cos 2x(2 \cos 2x - 1)}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x} = \frac{\sin 5x(4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1)}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x} = 0.$$

Eszerint x csak olyan szög lehet, amely mellett a számláló 0, vagyis amely kielégíti a

$$a) \sin 5x = 0 \quad \text{és} \quad b) 4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

egyenleteknek legalább egyikét. És minden ilyen szög gyöke az adott egyenletnek (hacsak vele a nevező nem válik zérussá, amikor az adott egyenlet legalább egy tagjának nincs értelme), mert csak ekvivalens átalakításokat végeztünk.

Végzősoron elég lesz egy 180° hosszúságú intervallumba, pl. a -90° és 90° közé eső gyököket megadni (a végpontokat mellőzve, mivel ott $\operatorname{tg} x$ úgy sincs értelmezve), mert a $\operatorname{tg} x$ függvény legkisebb periódusa 180° , a $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{tg} 4x$ legkisebb periódusa pedig 180° -nak fele, 3-ada, 4-e, tehát 180° az egyenlet bal oldala mindnégy tagjának periódusa; viszont $b)$ megoldásában tekintetbe kell vennünk, hogy a koszinusz-függvény legkisebb periódusa 360° .

Így $a)$ gyökei $5x = k \cdot 180^\circ$, $x = k \cdot 36^\circ$ -ből 0° , 36° , 72° , 108° , 144° ; és $b)$ olyan gyökei, amelyekre $-180^\circ < 2x < 180^\circ$:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \approx \begin{cases} +0,6404 \\ -0,3904 \end{cases} \quad \text{-ből} \\ 2x &\approx \begin{cases} \pm 50,18^\circ, \\ \pm 112,98^\circ, \end{cases} \quad x \approx \begin{cases} \pm 25,09^\circ, \\ \pm 56,49^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$

Ezek szerint abszolút értékük növekvő sorrendjében csak a következő szögek lehetnek gyökei az egyenletnek:

$$0^\circ, \quad \pm 25,09^\circ, \quad \pm 36^\circ, \quad \pm 56,49^\circ, \quad \pm 72^\circ.$$

Mindegyikük mellett az egyenlet mindegyik tagja értelmezve van, ezért mindegyik valóban gyök. Ezúttal próbát csak a számítások ellenőrzése céljára végzünk, ebben elég pl. a 0° és 90° közti értékeket kipróbálni, mert ha x gyöke az egyenletnek, akkor nyilván $-x$ is gyök.

Veres Gyula (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)

II. megoldás: Fejezzük ki $\operatorname{tg} 2x$, $\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{tg} 4x$ -et $\operatorname{tg} x = z$ -vel:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2z}{1 - z^2}, \\ \operatorname{tg} 4x &= \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{\frac{4z}{1 - z^2}}{1 - \frac{4z^2}{(1 - z^2)^2}} = \frac{4z(1 - z^2)}{1 - 6z^2 + z^4}, \\ \operatorname{tg} 3x &= \operatorname{tg} (2x + x) = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \frac{\frac{2z}{1 - z^2} + z}{1 - \frac{2z^2}{1 - z^2}} = \frac{z(3 - z^2)}{1 - 3z^2}, \end{aligned}$$

így az egyenlet:

$$(1) \quad z \left(1 + \frac{2}{1-z^2} + \frac{3-z^2}{1-3z^2} + \frac{4-4z^2}{1-6z^2+z^4} \right) = 0.$$

Eszerint egy gyök $z_1 = 0$ és ebből a nyitott $(-90^\circ, 90^\circ)$ intervallumban $x_1 = 0^\circ$, a további gyökök pedig (1) négytagújából adódnak. Ebben ismét páronkénti összeadással (szélsők, közbülsők) a két összegnek közös tényezője van:

$$\begin{aligned} & \frac{5-10z^2+z^4}{1-6z^2+z^4} + \frac{5-10z^2+z^4}{(1-z^2)(1-3z^2)} = \\ & = (5-10z^2+z^4) \left(\frac{1}{1-6z^2+z^4} + \frac{1}{1-4z^2+3z^4} \right) = 0, \end{aligned}$$

és ez lehetővé teszi a gyökök könnyű kiszámítását.

$$z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \text{-ből } z = \pm \sqrt{\frac{10 \mp \sqrt{80}}{2}} = \pm \sqrt{5 \mp 2\sqrt{5}} \approx \begin{cases} \pm 0,7265, \\ \pm 3,078, \end{cases}$$

és így $x_{2,3} \approx \pm 36,0^\circ$, $x_{4,5} \approx 72,0^\circ$; másrészt a kéttagú összegből

$$\frac{2-10z^2+4z^4}{(1-6z^2+z^4)(1-4z^2+3z^4)} = 0, \text{ azaz } 2-10z^2+4z^4 = 0 \text{-ből}$$

$$z = \pm \sqrt{5 \mp \sqrt{17}}/2, \quad z_1 \approx \pm 0,4682, \quad z_2 \approx \pm 1,510,$$

tehát $x_{6,7} \approx \pm 25,09^\circ$, $x_{8,9} \approx 56,48^\circ$, megegyezésben az I. megoldással.

Farkas Henrik (Eger, Dobó I. g. IV. o. t.)