

A tekintetbe vett hatványok a kitevők növekedő sorrendjében rendezve növekedő mértani sorozatot alkotnak, mert a hányados: $c > 1$. Másrészt c alig haladja meg az 1 értéket – a tagról tagra való növekedés kisebb 3%-nál –, azért a növekedés lassúnak mondható. A hatványok kiszámításáról természetesen nem lehet szó, de erre nincs is szükség. Ugyanis kezdő számjegyüket majdnem minden esetben megállapíthatjuk logaritmusokkal számított közelítő értékeik alapján.

A négyjegyű táblázatból $\lg c = 0,0100$, ennél fogva az utolsó tagra $\lg c^{100} = 1,00$, vagyis c^{100} közelítő értéke éppen 10, az első kétjegyű egész szám. Eszerint c^{100} kivételével minden hatvány bennünket érdeklő első jegye megegyezik a szám egész részével, ami legfeljebb 9. Így elég azt megállapítanunk, hány hatvány esik 1 és 2, 2 és 3, ..., 8 és 9 közé. Pl. 1-essel kezdődnek azok a c^k hatványok, amelyekre $1 < c^k < 2$. Vagy, mivel nagyobb számnak (tizes alapú) logaritmus a nagyobb (és fordítva: nagyobb logaritmushoz nagyobb szám tartozik), azért

$$\lg 1 = 0 < k \lg c = 0,01 k < \lg 2 = 0,3010.$$

Innen osztással

$$0 < k < 30,1,$$

eszerint c -nek első 30 hatványa esik 1 és 2 közé, kezdődik 1-es jeggyel, mert $c^{30,1} \approx 2$. Hasonlóan kapjuk a 3, 4, ..., 9 számok logaritmusának $\lg c = 0,01$ -dal való osztásával, hogy azoknak az x kitevőknek, amelyekre c^x éppen egyenlő 3-mal, 4-gyel, ..., 9-cel, közelítő értékük rendre a következő:

$$x \approx 47,7; \quad 60,2; \quad 69,9; \quad 77,8; \quad 84,5; \quad 90,3; \quad 95,4.$$

Eszerint pl. $c^{47} < 3$, de már $c^{48} > 3$, másrészt $c^{31} > 2$, tehát $47 - 30 = 17$ hatvány kezdődik 2-es jeggyel. A további x kitevő értékek mindegyikéből ugyanígy megállapítható, hogy a 4, 5, ..., 9 számoknak mint a c^x hatvány értékének átlépése mely két egész kitevő között történik, és evvel az, hogy ($k < 100$ esetén) hány c^k hatvány kezdődik 3-as, 4-es, ..., 8-as jeggyel.

Nem tudjuk viszont eldönteni, hogy mely k -nál történik a 10 szám átlépése, a kezdő számjegynek 9-ről 1-re való cserélődése. Ugyanis a $\lg c \approx 0,0100$ adatról biztos, hogy kerekített, mert $10^{0,0100} = {}^{100}\sqrt{10}$ irracionális szám, tehát nem egyenlő c -vel, mert ez véges tizedes tört, és így racionális. Mármint ha a 0,0100 szám $\lg c$ -nek felkerekített értéke, akkor $100 \lg c$ kisebb 1-nél, c^{100} kisebb 10-nél, és kezdő jegye 9-es; ha pedig 0,0100 lekerekített érték, akkor c^{100} kezdő jegye 1-es. Mindezek szerint azt mondhatjuk, hogy a tekintetbe vett hatványok közül az

$$1\text{-es}, \quad 2\text{-es}, \quad 3\text{-as}, \quad 4\text{-es}, \quad 5\text{-ös}, \quad ,6\text{-os}, \quad 7\text{-es}, \quad ,8\text{-as}, \quad 9\text{-es}$$

jeggyel kezdődők száma

$$30 \text{ v. } 31 \quad 17 \quad 13 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 5 \text{ v. } 4.$$

Salamín Pál (Budapest, Rákóczi F. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A mantisszatáblázat $\lg 1,023 = 0,0099$ és $\lg 1,024 = 0,0103$ adataiból interpolálással $\lg c$ -re 5 jegyre 0,01002 adódik, ami szerint a használt 0,0100 érték lekerekítettnek látszik. Mégsem tekinthetjük ezt biztosnak, mert ha mindkét használt táblázat adat erősen, – maximálisan $0,5 \cdot 10^{-4}$ -nel – felkerekített volna, akkor a 0,00985 és 0,01025 adatokból $\lg c$ is $0,5 \cdot 10^{-4}$ -nel kisebbnek, 0,00997-nek adódnék, vagyis a 0,0100 érték felkerekített volna.

Próbáljunk meg valamit mégis megállapítani a felhasznált adatok kerekítésének irányáról a táblázatnak a környezetükben fekvő, azokat megelőző és követő adataiból. A táblázat bármelyik 1 – 2, esetleg 3 egymás utáni sorát tekintve a táblabeli különbségek vagy egyenlők, vagy 10^{-4} -nel, táblázatunk egységével térnek el egymástól, és ezt kizárólag a kerekítések következményének tekinthetjük. (Az egész táblázaton végigtekintve pedig a különbségek 43-ról 4-re csökkennek.) Ezért kézenfekvő azt mondani, hogy ha egy különbség nagyobb az előtte és utána adódó különbségeknél, akkor kibővítené, a táblázat későbbi mantisszája felkerekített, kivonandója, a korábbi mantissza pedig lekerekített.

Ebben az értelemben a táblázat $\lg 1,022 = 0,0095$ és $\lg 1,027 = 0,0116$ adatai felkerekítettnek, a $\lg 1,026 = 0,0111$ adat lekerekítettnek tekinthető. Másrészt az 1,022-hez és 1,027-hez tartozó mantisszákból 5 egymás utáni különbség összege $116 - 95 = 21$ -nek, egy átlagos különbség 4,2-nek adódik. Úgy látszik tehát, hogy a felkerekített adatok hiánya lépésenként kb. 0,2 egységgel csökken, majd a lekerekített adatok többlete lépésenként 0,2 egységgel növekszik. Valószínű tehát, hogy a táblázat

$$0095 \quad 0099 \quad 0103 \quad 0107 \quad 0111 \quad 0116$$

adatának kerekítési iránya

$$\text{fel} \quad \text{fel} \quad \text{fel vagy le} \quad \text{le} \quad \text{le} \quad \text{fel}$$

Ezt a korábbiakkal egybevetve azt látjuk, hogy a $\lg c = 0,0100$ érték egyaránt lehet fel- és lekerekített, próbálkozásunk nem sikerült.

2. Más lehetőségnek ígérkezik az előbbi kérdés eldöntésére ez: számítsuk ki (közvetlenül) c^2 , c^3 értékét és próbáljuk meghatározni $\lg c$ -t ezek logaritmusából, vagyis $\lg c$ kétszereséből, háromszorosából. Azonban ez az út sem hoz döntést: $c^2 = 1,04714 \dots$, $c^3 = 1,07154 \dots$, $c^4 = 1,096518 \dots$, logaritmusául 0,0200, 0,0300, 0,0400 adódik és a fenti elgondolás szerint ismét egyik kerekítési irány sem adódik lehetetlennek.

3. Hatjegyű mantissza táblázatból $\lg 1,0233 = 0,010\,003$. Eszerint c^{100} nagyobb 10-nél, másrészt látjuk, hogy a fenti próbálkozásokkal a kerekítési hiba kicsi volta miatt nem érhattünk célba.

4. Eredményünket így is kimondhatjuk: a c szám első 99 hatványa közül

30, 47, 60, 69, 77, 84, 90, 95

olyan van, amelyben a kezdő számjegy kisebb, mint

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A létszámok közelítőleg arányosak $2, 3, \dots, 9$ logaritmusával. (Téves következtetések elkerülésére hangsúlyozzuk, hogy e tényben lényeges, hogy $c^0 = 1$ és $c^{100} \approx 10$.)

5. A feladatra a logarléc elvére (egy logaritmikus és egy egyenletes skála egymás mellé helyezésére) alapuló grafikus megoldást adott *Kövessi Nóra* (Budapest, Szilágyi E. lg. III. o. t.).

6. Egy dolgozat szerint „a példa rossz, mert c^{100} első jegyét nem lehet megállapítani”. – Megértjük a versenyző nem-tetszését, mert az iskolában legtöbbször olyan feladatok szerepelnek, amelyekre biztos, egyértelmű megoldás adható. Az életben azonban megesik, hogy be kell érünk efféle válasszal: a kérdésnek erre és erre a részére jelenlegi tudásom (segédeszközeim) alapján nem tudok (nem lehet) feleletet adni.