

A sugarak egyikének mértékszáma sem 0, ezért az adott összefüggés osztással így írható:

$$(1) \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1.$$

Másrészt ismeretesek e sugaraknak a háromszög oldalával, félkerületével és területével való alábbi összefüggései:

$$(2) \quad r = \frac{t}{s}, \quad r_1 = \frac{t}{s-a}, \quad r_2 = \frac{t}{s-b}, \quad r_3 = \frac{t}{s-c}.$$

Ezeket (1)-be helyettesítve, rendezéssel

$$(3) \quad 4s - (a + b + c) = 2s = t,$$

és ezt a (2)-ből adódó $rs = t$ egyenlőséggel egybevetve $r = 2$. Másrészt (2)-ből a Heron-képlet figyelembevételével

$$(4) \quad rr_1r_2r_3 = \frac{t^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = t^2,$$

ami négyzetszám, mert (3) szerint az oldalakkal együtt t is egész szám.

$r = 2$ alapján (1)-ből

$$(5) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}.$$

Feltehetjük, hogy $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Így (5) bal oldalába r_2 és r_3 helyett a nem nagyobb r_1 -et írva ez az oldal növekszik, vagy változatlan marad:

$$\frac{3}{r_1} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad r_1 \leq 6.$$

Másrészt geometriai jelentésüknél és a párossági feltevésnél fogva $r_1 > r$, tehát $r_1 \geq 4$, így vagy $r_1 = 6$, vagy $r_1 = 4$.

Az első eset nem lehetséges, mert (5) alapján hasonlóan $r_2 = r_3 = 6$ -ra vezet, és ezekkel (4) bal oldala $2 \cdot 6^3 = 432$, ami nem négyzetszám. A második esetben

$$(6) \quad \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{4}.$$

Innen egyrészt $r_3 > 4$, mert különben r_4 nem lehet pozitív, másrészt az előbbiekhöz hasonlóan $r_3 \leq 8$, tehát vagy $r_3 = 8$, vagy $r_3 = 6$. Ezek közül az első esetben $r_4 = 8$, és (4) bal oldala nem teljes négyzet, tehát ilyen megoldás nincs.

Az $r_3 = 6$ esetben (6)-ból $r_4 = 12$, így (4)-ből $t = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12} = 24$ ($t = -24$ nem felel meg), folytatólag (2)-ből:

$$s = 12, \quad s - a = 6, \quad s - b = 4, \quad s - c = 2.$$

Így a három oldalra négy egyenletből álló rendszert kaptunk. Ez megoldható, nem ellentmondó, mert az utóbbi három egyenlet összege az első egyenletre vezet:

$$3s - (a + b + c) = s = 6 + 4 + 2 = 12,$$

másrészt az oldalakra egész értékrendszert ad, mert az utóbbi három egyenletet az elsőből levonva:

$$a = s - (s - a) = 6, \quad \text{és hasonlóan} \quad b = 8, \quad c = 10.$$

A kapott megoldás derékszögű háromszög, az ismert „egyiptomi háromszög” 2-szerese. Az eddigiekből látható, hogy több megoldás nincs.

Rába Ferenc (Budapest, I. István Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. Az $r = 2$ értéket az oldalak, a terület és (2) figyelembevétele nélkül is megállapíthatjuk, a sugarak geometriai jelentéséből csak azt használva fel, hogy $r < r_1, r_2, r_3$. Ezzel ugyanis (1)-ből $4/r > 1$, $r < 4$ és 4-en alul $r = 2$ az egyetlen (pozitív) páros szám. A (2) összefüggések korábbi felhasználása csak azért célszerű, mert (4) könnyen használható feltételt ad a meg nem felelő r értékrendszerek kiválasztására.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn. III. o. t.)

2. Felesleges volna a, b, c megállapítása után azt vizsgálni, eleget tesz-e a 6, 8, 10 számhármas a háromszög-egyenlőtlenségeknek. Ezt $r_1 > r$ figyelembe vételével és t értékét pozitívnak véve biztosítottuk. Így ugyanis $s - a, s - b, s - c$ mindegyike pozitív, és ez azt jelenti, hogy egyik oldal sem éri el a kerület felét, tehát kisebb a további két oldal összegénél.