

Előzetes megjegyzés. A dolgozatok között az olyanok vannak nagyobb számban, amelyek az állítást trigonometriai számítás útján bizonyítják. Egy ilyen rövid és egyszerű bizonyítás a következő.

I. megoldás: Ismert azonosságok alapján a feltevés átalakításával

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \cos \frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin \beta} = 2 \cos \frac{\gamma-\alpha}{2} = \sqrt{2},$$

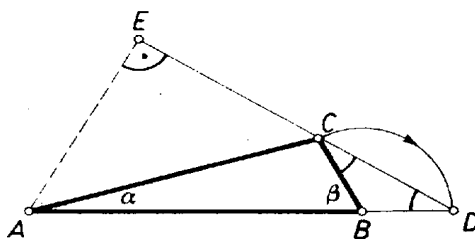
innen $(\gamma - \alpha)/2 = 45^\circ$ és $\gamma - \alpha = 90^\circ$, amit bizonyítanunk kellett.

Pál Gábor (Miskolc, Gábor Á. kohó- és öntőip. t. IV. o. t.)

Sokkal kevesebb előismeret elegendő a megoldáshoz. A továbbiakban ilyen megoldásokat mutatunk be.

II. megoldás: β számtani közepe α és γ -nak, eszerint α, β, γ számtani sorozatot alkotnak. Ilyen számhármass közepső tagja az összegüknek harmadrésze, ezért $\beta = 60^\circ$. Másrészt a $c > a$ feltevés folytán $\gamma > \alpha$, és így $\alpha < 60^\circ < \gamma$.

Forgassuk rá a BC oldalt AB -nek B -n túli meghosszabbítására: $BD = BC = a$, és így $AD = a + c$, másrészt a BCD egyenlő szárú háromszögből $BCD\angle = BDC\angle = \beta/2 = 30^\circ$. Legyen A vetülete a CD egyenesen E .



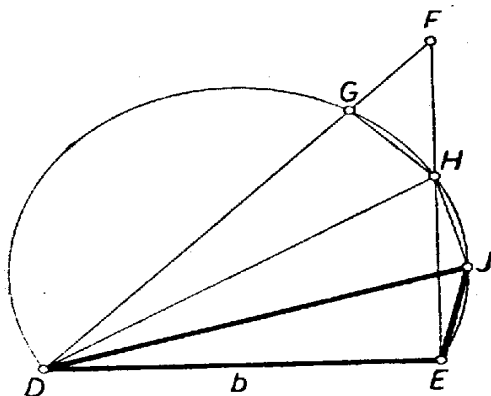
2. ábra

Így az ADE szög 30° és az ADE derékszögű háromszög úgy tekinthető, mintha egy $AD = a + c$ oldalú szabályos háromszögből jött volna létre egy magassággal való kettévágás útján, ezért $AE = AD/2 = (a + c)/2$. Ez a feltevés folytán egyenlő $b/\sqrt{2}$ -vel, a b átfogó fölé írt egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójával. Így az ACE derékszögű háromszög egyenlő szárú, mert hasonló bármely egyenlő szárú derékszögű háromszöghöz, hiszen megegyeznek két oldal arányában ($AC : AE = \sqrt{2}$) és az ezek nagyobbikával szemben fekvő derékszögben. Eszerint $ACE\angle = 45^\circ$, $ACD\angle = 135^\circ$, ezekből $\gamma = ACB\angle = ACD\angle - BCD\angle = 135^\circ - 30^\circ = 105^\circ$, másrészt $\alpha = 15^\circ$, és így valóban $\gamma = \alpha + 90^\circ$.

Bodosi Tamás (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

A továbbiakban $\beta = 60^\circ$ -ot ismertnek vesszük, másrészt az $\alpha = 15^\circ$ érték megállapítása után a megoldást befejezteknek tekintjük.

III. megoldás: Az adatoknak megfelelő alakú háromszöghöz jutunk a következő úton. A $\beta = 60^\circ$ és $b\sqrt{2} = a + c$ összefüggések azt a gondolatot adják, rajzoljuk meg a $DE = b$ szakasz egyik oldalára illeszkedő 60° -os látószöghözkörívet és az E -nél derékszögű DEF egyenlő szárú háromszöget, ebben ugyanis $DF = b\sqrt{2}$. Messe a körív a DF, EF oldalt G , ill. H -ban.



1. ábra

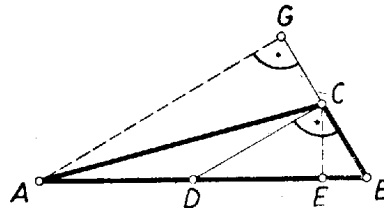
Ekkor DH az ívnek átmérője (az ív ugyanis nyilvánvalóan nagyobb félkörnél) így $DGH\angle = FGH\angle = 90^\circ$, másrészt $DFE\angle = GFH\angle = 45^\circ$, ezért az FGH háromszög egyenlő szárú: $GF = GH$. Továbbá $DHE\angle = 60^\circ$,

ezért $HDE \sphericalangle = 30^\circ$, másrészt $GDE \sphericalangle = 45^\circ$, és így $GDH \sphericalangle = 15^\circ$. Ha most a H körül GH sugárral írt kör az ívet másodszor J -ben metszi, akkor a mondott háromszög alak DJE . Ebben ugyanis $HJ = HG$ folytán egyrészt $HDJ \sphericalangle = HDG \sphericalangle = 15^\circ$, ezért $JDE \sphericalangle = HDE \sphericalangle - HDJ \sphericalangle = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ = HDJ \sphericalangle$, és így $JE = JH = HG = GF$; másrészt a JDH és GDH derékszögű háromszögek egybevágók, ezért $JD = GD$. Ezek szerint a DJE háromszög J -ből kiinduló oldalaira $JD + JE = GD + GF = DF = DE\sqrt{2}$ és J -nél fekvő szöge 60° , vagyis a DJE háromszögben feladatunk mindkét egyenlőségi feltevése teljesül.

E két feltevés a háromszög alakját (azaz szögeit, más szóval a háromszöget hasonlóság erejéig) egyértelműen meghatározza (ugyanis az oldalak közti összefüggés az $a/b + c/b = \sqrt{2}$ alakban az oldalak arányai közötti összefüggést ad). Ennélfogva minden, a feltevésnek megfelelő háromszögben a további szögek $EDJ \sphericalangle = 15^\circ$ -kal, ill. $DEJ \sphericalangle = 180^\circ - (60^\circ + 15^\circ) = 105^\circ$ -kal egyenlők.

Frint Gábor (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

IV. megoldás: A bizonyítandó állítást $\gamma - 90^\circ = \alpha$ alakban írva elég azt megmutatnunk, hogy a BC oldalra C -ben állított merőleges az AB oldalt olyan belső D pontban metszi, amellyel az ACD háromszög $ACD = \gamma - 90^\circ$ és $CAD = \alpha$ szögei egyenlők. Ehhez pedig elegendő $AD = DC$ fennállását belátni.



Ha C vetülete AB -n E , akkor a BCE háromszögből $CE = a\sqrt{3}/2$, $BE = a/2$, és mivel $\beta < 90^\circ$ folytán E az AB -n van, $AE = c - a/2$. Így az ACE derékszögű háromszögből Püthagorász tétele, valamint a feltevés alapján összefüggést kapunk a és c között:

$$b^2 = \left(\frac{a+c}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(c - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2,$$

ebből

$$a^2 - 4ac + c^2 = 0,$$

és $c = 2a + a\sqrt{3}$ (a kisebb gyök nem felel meg a $c > a$ követelménynek): Másrészt a BCD derékszögű háromszögből $CD = a\sqrt{3}$ és $BD = 2BC = 2a$.

Most már látható, hogy D valóban az AB -n fekszik, ugyanis $BA > BD$, mert $c > 2a$, továbbá, hogy $AD = AB - BD = c - 2a = a\sqrt{3} = CD$, amit bizonyítani akartunk.

Kardeván Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A $c = 2a + a\sqrt{3}$ eredmény felhasználásával az $a = 15^\circ$ eredményt így is igazolhatjuk. Ha A -nak BC -n levő vetülete G , akkor AC felezi a $BAG = 30^\circ$ -os szöget, mert a BG oldal C -vel való kettéosztásakor keletkezett részek $GC : BC$ aránya megegyezik GA és BA arányával. Az utóbbi, mint már láttuk, $\sqrt{3}/2$ -vel egyenlő, másrészt $BG = c/2$ és a fenti $c = 2a + a\sqrt{3}$ alapján a másik arány értéke ugyanennyi: $GC = BG - BC = c/2 - a = (c - 2a)/2 = a\sqrt{3}/2 = BC\sqrt{3}/2$.

Noszticzius Zoltán (Budapest, József A. g. IV. o. t.)