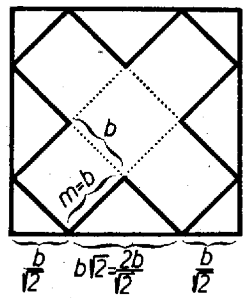
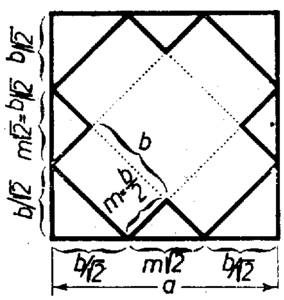
Legyen a papírlemez oldala a, a hasáb alapéle b, magassága m. A hálózat egy b oldalú négyzetből és négy b és m oldalakkal bíró téglalapból áll. Egy darabban leendő elkészítéséhez a lapokat 8-féleképpen rendezhetjük el. Tekintsük közülük a legegyszerűbb, legtetszetősebb típust, azt, amelyben mind a négy alapél hajtással és mind a négy oldalél ragasztással alakul ki (ennek ugyanis négyes forgási szimmetriája és négy szimmetriatengelye van), ezzel várható, hogy b és m legnagyobbra vehető. Ilyen hálózat úgy szerkeszthető, ha a négyzetlemezbe két olyan téglalapot írunk az átlókkal párhuzamos oldalakkal, melynek oldalai b és $b+2m$, közös részük a b oldalú négyzet.



1. ábra

Kockát az $m=b$ esetben kapunk (1. ábra); ekkor a berajzolt téglalapok oldalai b és $3b$. A lemez egy oldalára való vetületeik összege egyenlő a lemez oldalával, tehát $4b/\sqrt{2}=a$ és így $b=a/2\sqrt{2}$. Ezért a hálózat szabadonálló csúcsai a lemez oldalainak első és harmadik negyedrészében vannak; a térfogat: $V_k=b^3=a^3\sqrt{2}/32=a^3/16\sqrt{2}$.



2. ábra

Általában $b/\sqrt{2}+(2m+b)/\sqrt{2}=a$ (2. ábra), és innen $b+m=a/\sqrt{2}$ állandó, vagyis b növekedésével m csökken és viszont. A térfogat $V=b^2m$, amit olyan szorzattá alakíthatunk, amelyben a tényezők összege állandó:

$$V=b^2m=b\cdot b\cdot m=4\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot m,$$

és $V/4$ tényezőire

$$\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+m=b+m=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Így a pozitív számok számtani és mértani közepe közti ismert egyenlőtlenséget három szám esetén alkalmazva $V/4$ értéke akkora legnagyobb, ha tényezői egyenlők: $b/2=m$, és így $b+m=3m=a/\sqrt{2}$, $m=a/3\sqrt{2}$, $b=a\sqrt{2}/3$ és $V_{\max}=a^3\sqrt{2}/27(>V_k$. Az előálló test $m=b/2$ alapján nevezhető fél-kockának. A hálózat csúcsai a négyzetlemez csúcsaitól $b/\sqrt{2}=a/3$ távolságban vannak, a lemez oldalait $3-3$ egyenlő részre osztják.

Tomcsányi Gyula (Budapest, Toldy F. g. III. o. t)

Megjegyzések. 1. Nincs szükség a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség használatára annak az előre kimondott állításnak bizonyításához, hogy legnagyobb térfogat fél-kockával adódik. Válasszuk a hálózatnak a lemez oldalain levő csúcsait a lemez csúcsaitól $a/3$ helyett $a/3-z$ távolságban. Ekkor $b=(a/3-z)\sqrt{2}$, $m=a/\sqrt{2}-b=(a/6+z)\sqrt{2}$, a megváltozott térfogat

$$V(z)=b^2m=2\sqrt{2}\left(\frac{a}{3}-z\right)^2\left(\frac{a}{6}+z\right)=\sqrt{2}\left(\frac{a^3}{27}-az^2+2z^3\right),$$

és ennek a fél-kocka $V_0=a^3\sqrt{2}/27$ térfogatától való eltérése:

$$V(z)-V_0=\sqrt{2}z^2(2z-a).$$

$V(z)$ akkor volna nagyobb V_0-nál, ha ez a különbség pozitív volna, ami csak $z > a/2$ mellett következhetne be. Ez viszont ki van zárva, mert itt z, a lemez csúcsaihoz való közeledés, nem érheti el az $a/3$ értéket, s így a különbség nem lehet pozitív. – Vizsgálatunk azt a lehetőséget is magában foglalja, ha a hálózat csúcsait a lemez oldalán az oldal közepe felé toljuk el, ilyenkor z negatív, az eltérés is negatív, tehát V_0 nagyobb $V(z)$-nél, ha csak z nem 0.

M. I.

2. Tíz dolgozat említi, vagy vázlatosan vizsgálja a hálózat lapjainak néhány vagy valamennyi más lehetséges egymás mellé helyezését. Szerzőik e többletért $1-1$ jutalompontot kaptak. A többi dolgozatok 1 kivételével a bemutatott típusú hálózatot vizsgálták.

A fentihez hasonló számításokkal meg lehet mutatni, hogy a további 7 elrendezési lehetőség mindegyike esetén V_0-nál kisebb az elérhető legnagyobb térfogat. – Ismert feladat viszont, hogy a hálózat hajtási és vágási vonalait a lemez oldalaival párhuzamosnak véve az elérhető legnagyobb térfogat $2a^3/27 = V_0\sqrt{2}$, ekkor a hasáb magassága negyedrésze az alapélnek.