

**I. megoldás:** A három kérdés megválaszolásának előkészítéséül vizsgáljuk az

$$(1) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$$

kifejezésnek mint  $x$  függvényének értékét, a megjegyzésnek megfelelően minden négyzetgyökvonásban a gyök abszolút értékét véve.

A belső négyzetgyök értéke akkor valós szám, ha  $2x - 1 \geq 0$ ,  $x \geq 1/2$ . Ilyen  $x$ -ekre mindkét (nagy) négyzetgyök valós számot ad, mert az első alatt két nem negatív szám összege áll, a másodikban pedig a kisebbítendő és a kivonandó négyzetének különbségét vizsgálva, ha  $x \geq 1/2$ , akkor  $x^2 - (\sqrt{2x-1})^2 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ , és mivel az alapok pozitívok, így azokra

$$x \geq \sqrt{2x-1}.$$

Az egyenlőségi jel  $x = 1$  esetére érvényes.

Mivel a két gyökjel alatti kifejezés egymásnak ún. konjugáltja, azért kifejezésünk négyzete egyszerűbbnek ígérkezik. Valóban, összevonás után

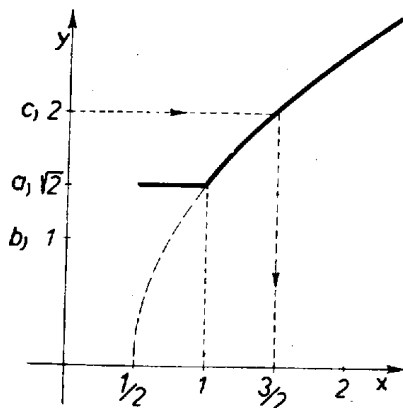
$$y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-1)^2} = 2x + 2|x-1|.$$

Már most  $x \leq 1$  esetére  $x-1$  negatív vagy 0, így  $|x-1| = -(x-1) = 1-x$ , ezért  $y^2 = 2x + 2(1-x) = 2$ , ennél fogva  $y = \sqrt{2}$ , állandó.

$x > 1$  esetére pedig  $x-1$  pozitív, így  $|x-1| = x-1$ , tehát  $y^2 = 2x + 2(x-1) = 4x-2$ , ennél fogva  $y = \sqrt{4x-2}$ .

Ezek szerint az *a)* egyenlőség az  $x \geq 1/2$ ,  $x \leq 1$  értékekre, más szóval az  $(1/2, 1)$  zárt intervallumban teljesül, másutt nem; a *b)* egyenlőség sehol sem teljesül, ez olyan egyenlet, amelynek nincs gyöke, mert a  $\sqrt{4x-2}$  kifejezés értéke az  $x = 1$  helyen  $\sqrt{2}$ , és  $x$  növekedtével növekszik, tehát  $y \geq \sqrt{2}$ , ha  $x \leq 1/2$ ; végül a *c)* egyenlőség egyenlet, melynek gyöke  $x = 3/2$ , az egyenlőség ezen egyetlen érték mellett érvényes.

Klimó János (Kaposvár, közg. t. IV. o. t.)



**II. megoldás:** A bal oldalak egyszerűbbé tételére alkalmazzuk a  $\sqrt{2x-1} = z$  helyettesítést. A négyzetgyök értékére tett megállapodásunknak megfelelően csak  $z$  nem negatív értékeit kell figyelembe vennünk. Kifejezve  $x$ -et  $z$ -vel  $x = (z^2 + 1)/2$ , tehát (1) a helyettesítéssel így alakul:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{z^2+1}{2}} + z + \sqrt{\frac{z^2+1}{2}} - z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{z^2+1+2z} + \sqrt{z^2+1-2z}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z+1 + |z-1|). \end{aligned}$$

(A zárójel első tagjában az abszolút érték jelét mindjárt mellőzhettük, mert  $z+1 \geq 1 > 0$ .) Innen a fentiekhez hasonlóan

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq 1 \quad \text{esetére} \quad y &= \frac{1}{\sqrt{2}}[z+1 + (1-z)] = \sqrt{2}, \\ z \geq 1 \quad \text{esetére} \quad y &= \frac{1}{\sqrt{2}}[z+1 + (z-1)] = \sqrt{2}z, \end{aligned}$$

(lásd a grafikont).

Ezek szerint az *a)* egyenlőség mindazon  $x$ -ekre teljesül, amelyeket a  $0 \leq z \leq 1$ -et teljesítő  $z$  értékek adnak meg; ezekből  $x = (z^2 + 1)/2$ -re tekintettel  $0 \leq z^2 \leq 1$ , így  $1 \leq z^2 + 1 \leq 2$  és  $1/2 \leq x \leq 1$ ;

a *b)* egyenlőség semmilyen  $z$ -re és így semmilyen  $x$ -re sem teljesül, mert  $z \geq 1$  mellett a bal oldal értéke:  $y = \sqrt{2}z \geq \sqrt{2} > 1$ ;

a *c)* egyenlőség pedig  $\sqrt{2}z = 2$ -ből  $z = \sqrt{2}$ -vel, és ennél fogva  $x = (2+1)/2 = 3/2$  mellett teljesül.

*Megjegyzés.* Több a II. megoldáshoz hasonló dolgozat nem zárta ki a  $z < 0$  értékeket, ezért az

$$y = \frac{1}{2}(|z + 1| + |z - 1|)$$

alakból tetszetősebb grafikonhoz jutott, amely a fentén kívül az  $Y$ -tengelyre való tükröképét is tartalmazza, és így rajzzal a gimnáziumi IV. osztályos tankönyvből ismert módon magyarázza  $y$ -nak a középső intervallumbeli állandóságát.