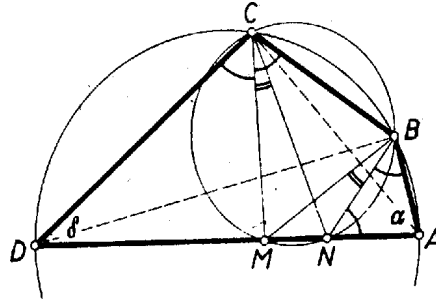


I. megoldás: Tegyük fel, hogy van a feladatban leírt tulajdonságú M pont és vegyük segítségül az AD oldalnak azt az N pontját, amelyre $AN = AB$; ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy $CD = DN$.



Legyen $\angle BAD = \alpha$ és $\angle CDA = \delta$, ekkor a húrnégyszög szögeire vonatkozó tétel alapján $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$ és $\angle ABC = 180^\circ - \delta$. Az adott tulajdonságú M pont rajta van a négyszög B, C csúcsainál fekvő szögek felezőin, ezért $\angle ABM = (180^\circ - \delta)/2$ és $\angle BCM = (180^\circ - \alpha)/2$. Az utóbbi szög akkora, mint az ABN egyenlő szárú háromszög alapján fekvő ABN és ANB szögek, így a BCM idom húrnégyszög és N a BCM háromszög körülírt körének AD -vel való második közös pontja. Most már – feltéve, hogy N az AM szakaszon van –

$$\begin{aligned} \angle NCD &= \angle NCM + \angle MCD = \angle NBM + \angle BCM = \\ &= (\angle ABM - \angle ABN) + \angle BCM = \angle ABM = (180^\circ - \delta)/2, \end{aligned}$$

vagyis az NCD háromszög egyenlő szárú, $CD = ND$, amit bizonyítani akartunk. – Ha N a DM szakasz pontja, akkor ismét

$$\begin{aligned} \angle NCD &= \angle MCD - \angle MCN = \angle BCM - \angle MBN = \\ &= \angle BCM - (\angle ABN - \angle ABM) = \angle ABM. \end{aligned}$$

Végül ha N egybeesik M -mel, akkor $\angle ABM = \angle ABN = (180^\circ - \alpha)/2$, így $\angle ABC = 2\angle ABM = 180^\circ - \alpha$, vagyis BC párhuzamos AD -vel, az $ABCD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ezért az $M \equiv N$ pont a szimmetriatengelyen van, tehát felezi AD -t, és így $DN = AN = AB = CD$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Czékus Laborc (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $AB + CD = AD$ feltétel elegendő is a kérdéses tulajdonságú M pont létezéséhez. Ha ugyanis egy kör AD húrjának egy pontja N és a kört az A körül AN , és D körül DN sugárral írt körök AD -nek ugyanazon oldalán B , ill. C -ben metszik, akkor van az AD húron olyan pont, amely az $ABCD$ négyszög AB, BC és CD oldalaitól egyenlő távolságra van. Ilyen a BCN háromszög köré írt körnek AD -vel való M második metszéspontja, (ill. ha a kör érinti AD -t, akkor maga N). Valóban, a fenti jelöléseket használva, és csupán arra az esetre szorítkozva, ha M a DN szakaszon adódik: $\angle MBA = 180^\circ - \alpha - \angle ABM = \angle DCB - \angle NMB = \angle DCB - \angle NCB = \angle DCN = (180^\circ - \delta)/2 = \angle ABC/2$, vagyis BM felezi az ABC szöget, M egyenlő távolságra van AB és BC -től. (Csak C és M szerkesztési módját használtuk fel, továbbá B -ről azt, hogy valahol a körnek az ADC szög szárai közötti AC íven van.) Hasonlóan látható be, hogy CM felezi a DCB szöget és így M egyenlő távolságra van BC és CD -től; ebben használjuk fel B szerkesztési módját. Eszerint M mindhárom mondott oldaltól egyenlő távolságra van.

2. Sem az állítás, sem a megfordított tétel bizonyításában nem használtuk fel, hogy AD a körülírt körben átmérő, ezért minden olyan konvex húrnégyszögben, amelyben két szomszédos szög felezői egymást a csúcsikat összekötő oldallal szemkötti oldalon metszik, ez a szemben fekvő oldal egyenlő a vele szomszédos oldalak összegével. Az $ABCD$ idom konvexitását viszont felhasználtuk, vagyis hogy B és C az AD -nek ugyanazon partján vannak, ezen alapult a BCM háromszög körülírt körében az MN húr C és B -ből való látószögeinek egyenlősége.

Gazsi Lajos (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

Tihanyi Ambrus (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

A további megoldások ábráin AD nem átmérőnek van rajzolva, de a szövegben nem térünk ki azon esetekre, ha α és δ között tompaszög is lép fel.

II. megoldás: Legyen M vetülete az AB, BC, CD oldalon rendre E, F, G , ekkor feltevésünk szerint $ME = MF = MG$, továbbá $BE = BF$ és $CF = CG$. Így az $MEBF$ és $MFCG$ négyszögek húrdeltoidok, EF és MB , ill. FG és MC átlóik merőlegesek, és bennük, az $ABCD$ idom húrnégyszög voltát is felhasználva, $\angle EMF = 180^\circ - \angle EBF = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC = \delta$ és hasonlóan $\angle FMG = \alpha$. Ezért ha még E és G vetülete MF -re H , ill. J , akkor az MGJ és AME , valamint MEH és DMG derékszögű háromszögek hasonlóak és ugyanez áll a merőleges szárú $\delta/2$ ill. $\alpha/2$ hegyesszögeket tartalmazó MBF, EFM és MCF, GFJ derékszögű háromszög-párookra. Ezek alapján folytatolagos átalakítása,

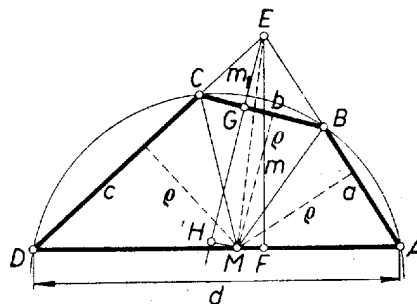
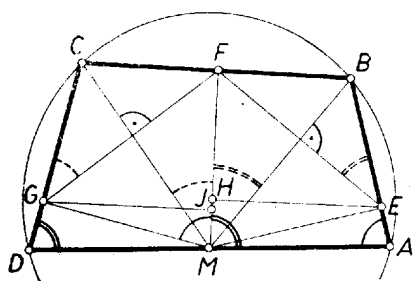
$$\frac{EB}{ME} = \frac{FB}{MF} = \frac{HF}{EH} = \frac{MF}{EH} - \frac{MH}{EH} = \frac{ME}{EH} - \frac{DG}{MG} = \frac{DM}{MG} - \frac{DG}{MG} = \frac{DM - DG}{ME},$$

és így (az egyenlőség-sorozat szélső tagjait ME -vel szorozva) $EB = DM - DG$, másképpen $EB + GD = MD$. Hasonlóan kapjuk, hogy $AE + CG = AM$ (A és D -t, B és C -t páronként felcserélve E és G , valamint H és J is páronként felcserélődnek.) E két egyenlőség alapján pedig

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AE + EB) + (CG + GD) = (AE + CG) + (EB + GD) = \\ &= AM + MD = AD, \end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Hahn János (Szeged, Déry M. gépép. t. IV. o. t.)



III. megoldás: Legyenek a négyszög oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, a kérdéses M pontnak a három oldaltól való távolsága ϱ , az AB és DC oldalegyenesek metszéspontja E , ennek vetülete AD és BC -re F , ill. G , és $EF = m$, $EG = m_1$. A feltevésnél fogva EM felezi az AED szöget. Így az $ABCD$ négyszög kétszeres területe kétféleképpen is kifejezhető:

$$2t = (a + b + c)\varrho = dm - bm_1,$$

és innen

$$AB + CD = a + c = \frac{dm - b(m_1 + \varrho)}{\varrho}.$$

Az ADE és CBE háromszögek hasonlóak, mert a C és A , a B és D csúcspároknál fekvő szögek a húrnégyszög alaptulajdonsága folytán egyenlők, így $b : d = m_1 : m$, $b = dm_1/m$, ennél fogva

$$a + c = \frac{dm^2 - dm_1(m_1 + \varrho)}{m\varrho}.$$

Ugyancsak a fenti indok alapján hasonlóak az AEF és CEG derékszögű háromszögek is, így EF és EG tükrös párok EM -re. Ha tehát az M -en át BC -vel húzott párhuzamos EG -t H -ban metszi, akkor $HG = \varrho$, továbbá az MEH és MEF derékszögű háromszögek egybevágóságából

$$EH = EG + GH = m_1 + \varrho = EF = m, \quad \text{másképpen} \quad m - m_1 = \varrho,$$

és ennek felhasználásával

$$a + c = \frac{dm^2 - dm_1m}{m\varrho} = \frac{dm - dm_1}{\varrho} = \frac{d(m - m_1)}{\varrho} = d,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Rozváczy Judit (Budapest, Szilágyi Erzsébet lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A négyszög területének kifejezéséhez átmenetileg trigonometriai ismereteket is használva hasonlóan juthatunk célhoz. A kétszeres terület az AC átlóval való két részre osztásból kiindulva

$$2t = ab \sin(180^\circ - \delta) + cd \sin \delta = (ab + cd) \sin \delta = (ab + cd)\varrho/DM,$$

és innen $DM = (ab + cd)\varrho/2t$. Hasonlóan a BD átlóval való felbontásból $AM = (ad + bc)\varrho/2t$. Ezekkel $AM + DM = d$ alapján, valamint a fenti megoldás kiindulópontjának felhasználásával

$$2t/\varrho = (ab + cd + ad + bc)/d = a + b + c$$

és innen átrendezéssel $a + c = d$.

Muszbek László (Törökszentmiklós, Bercsényi M. g. IV. o. t.)

2. A megoldások többsége trigonometriai úton bizonyította az állítást. Ilyen volt a II. megoldás is, amely alapgondolatában a $\operatorname{tg} x/2 = (1 - \cos x)/\sin x$ azonosságot használta fel. Ajánljuk a megoldás ilyen átalakítását és az összehasonlítást. Utolsóként egy szögfüggvényeket felhasználó megoldást adunk, ebben egyszerűség végett támaszkodunk arra, hogy AD átmérő, és hogy $0^\circ < \alpha$, $\delta < 90^\circ$.

IV. megoldás: Feltevésünk úgy is kimondható, hogy a négyszögünk B és C csúcsánál fekvő szögek felezői AD -n metszik egymást. Ez a félkörbe írt négyszögek közül nyilván nem valamennyire teljesül (pl. az AD alapon álló elég kicsi és elég nagy magasságú egyenlő szárú trapézokban a metszéspont „közel van” az AD -re merőleges átmérő „alsó”, ill. „felső” végpontjához), ezért avégett, hogy a szögfelezők AD -n messék egymást, B és C közül, más szóval α és δ közül legfeljebb az egyiket választhatjuk tetszés szerint. Keressünk tehát összefüggést α és δ között. Az ABD és ACD derékszögű háromszögekből $AB = AD \cos \alpha$, $CD = AD \cos \delta$, ezért a bizonyítandó egyenlőségből AD -vel való osztással ez várható: $\cos \alpha + \cos \delta = 1$.

Ezt abból bizonyítjuk, hogy $1/AM$ -nek az AMB és AMC háromszögekből a szinusz-tétel alapján vett kifejezései egyenlők. Az ABM háromszögből $ABM \sphericalangle = 90^\circ - \delta/2$, így $AMB \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \delta/2) = 90^\circ - (\alpha - \delta/2)$; másrészt $ACB \sphericalangle = DCB \sphericalangle - DCA \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$, így $MCA \sphericalangle = MCB \sphericalangle - ACB \sphericalangle = (180^\circ - \alpha)/2 - (90^\circ - \alpha) = \alpha/2$, tehát az ACM háromszögből $AMC \sphericalangle = 180^\circ - (90^\circ - \delta) - \alpha/2 = 90^\circ + (\delta - \alpha/2)$. Ezekkel

$$\begin{aligned} \frac{1}{AM} &= \frac{\sin AMB \sphericalangle}{AB \sin ABM \sphericalangle} = \frac{\sin AMC \sphericalangle}{AC \sin ACM \sphericalangle}, \\ \frac{\cos(\alpha - \delta/2)}{AD \cos \alpha \cos \delta/2} &= \frac{\cos(\delta - \alpha/2)}{AD \sin \delta \sin \alpha/2}. \end{aligned}$$

A számlálókát az addíció tételek alapján felbontva és tagonkénti osztással, egyszerűsítéssel

$$1 + \frac{\sin \alpha \sin \delta/2}{\cos \alpha \cos \delta/2} = \frac{\cos \delta \cos \alpha/2}{\sin \delta \sin \alpha/2} + 1.$$

Átrendezéssel, a $\sin x = 2 \sin x/2 \cos x/2$, majd a $2 \sin^2 x/2 = 1 - \cos x$ azonosságok alapján

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 \alpha/2 \sin^2 \delta/2 &= \cos \alpha \cos \delta, \\ (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \delta) &= \cos \alpha \cos \delta, \\ 1 - \cos \alpha - \cos \delta &= 0, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Számos dolgozat azért hiányos, mert szűk, a helyzetekbe mindenáron szimmetriát bevinni kívánó (többnyire öntudatlan) szemléletből kiindulva az $ABCD$ négyszög egyetlen lehetséges alakjaként a szabályos hatszög felét hajlandó elfogadni, vagy ami ugyanaz, M -et csak AD felezőpontjaként. Az I. megoldásból látható, hogy az AD húron bárhol felvett N pontból kiindulva $AB = AN$ és $DC = DN$ -nel és B , C -t AD -nek ugyanazon partján véve a szóbanforgó tulajdonságú négyszöget kapunk.