

Törzsszámhatványok szorzatára felbontva $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ezért a kívánt oszthatósághoz szükséges és elegendő, hogy K osztható legyen 2^3 , 3 , 5 és 7 mindegyikével. K -nak 2-ik, 3-ik és 4-ik tagja bármely természetes n -re páros, ezért K akkor és csak akkor páros, ha n^3 páros. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha n páros: $n = 2k$. Páros n -re K mindjárt 2^3 -nel is osztható, mert így $K = 8k^3 + 24k^2 - 8k - 24 = 8(k^3 + 3k^2 - k - 3)$.

Hasonlóan 3-mal akkor és csak akkor osztható K , ha 1-ső és 3-ik tagja együtt osztható 3-mal. Már most $n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = (n - 2)n(n + 2) - n + 2 = (n - 1) + 3$ alapján így is írhatjuk: $(n - 2)(n - 1)n + 3(n - 2)n$, ez pedig $3A$ alakú (ahol A egész szám), mert első tagja három egymás utáni egész szám szorzata, ami mindig osztható 3-mal, második tagjának pedig tényezője a 3. Így K minden n természetes számra – sőt minden n egész számra – osztható 3-mal.

Könnyű felismerni, hogy K fentebbi alakja szorzattá alakítható:

$$K = 8[k^2(k + 3) - (k + 3)] = 8(k + 3)(k^2 - 1) = 8(k - 1)(k + 1)(k + 3).$$

Így K nyilván akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha ez a $k - 1$, $k + 1$, $k + 3$ fényezőik valamelyikére teljesül, tehát

$$\begin{aligned} \text{vagy } k - 1 &= 5m, \text{ azaz } k = & 5m + 1, \\ \text{vagy } k + 1 &= 5j, \text{ azaz } k = 5j - 1 = 5(j - 1) + 4 = & 5m + 4, \\ \text{vagy } k + 3 &= 5j, \text{ azaz } k = 5j - 3 = 5(j - 1) + 2 = & 5m + 2, \end{aligned}$$

ahol m természetes szám, vagy 0. És hasonlóan K akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha

$$\text{vagy } k = 7s + 1, \quad \text{vagy } k = 7s + 6, \quad \text{vagy } k = 7s + 4.$$

Más szóval akkor, ha k -t 5-tel osztva a maradék vagy 1, vagy 2, vagy 4, és k -t 7-tel osztva a maradék vagy 1, vagy 4, vagy 6.

Ezt a 3 – 3 követelményt $3 \cdot 3 = 9$ -féleképpen kapcsolhatjuk párba. Megmutatjuk példákon, hogy a két osztási maradék vizsgálatát eggyel helyettesíthetjük, a k szám $5 \cdot 7 = 35$ -tel való osztásának maradékát vizsgálva.

Ha pl k -t akár 5-tel, akár 7-tel osztva maradékul 1-et kell kapnunk, akkor a

$$k = 5m + 1 = 7s + 1$$

egyenletből $5m = 7s$, ami csak úgy lehetséges, ha m osztható 7-tel: $m = 7t$, mert 5 és 7 relatív prímek; és így $k = 35t + 1$. Világos, hogy az ilyen k számok 5-tel osztva is, 7-tel osztva is 1-et adnak maradékul.

Hasonlóan $k = 5m + 1 = 7s + 4$ -ből

$$m = \frac{7s + 3}{5} = s + \frac{2s + 3}{5} = s + u$$

akkor és csak akkor egész, ha $2s + 3 = 5u$, vagyis

$$s = \frac{5u - 3}{2} = 2u + \frac{u - 3}{2} = 2u + \nu$$

egész, ez pedig teljesül, ha $u - 3 = 2\nu$, vagyis $u = 2\nu + 3$. Ebből $s = 2(2\nu + 3) + \nu = 5\nu + 6$, ezért $m = (5\nu + 6) + (2\nu + 3) = 7\nu + 9$ és végül $k = 5(7\nu + 9) + 1 = 35\nu + 46 = 35(\nu + 1) + 11 = 35w + 11$; ennek maradékai 5-tel, ill. 7-tel osztva valóban $11 - 2 \cdot 10 = 1$, ill. $11 - 7 = 4$.

Valamivel rövidebben jutunk célhoz a $k = 5m + 2 = 7s + 6$ esetben. Innen $m = (7s + 4)/5 = s + 2(s + 2)/5 = s + 2z$ csak akkor egész, ha $s + 2 = 5z$, $s = 5z - 2$, $m = 7z - 2$, $k = 35z - 8 = 35(z - 1) + 27$. (Ez azon múlt, hogy észrevettük a 2-es tényező kiemelhetőségét.)

Valamennyi maradék-párosítás eredményét táblázatban foglaljuk össze. A táblázat belsejében álló, $35t + u$ típusú alakok 5-tel osztva a sor elején álló, 7-tel osztva az oszlop fején álló alakra vezetnek.

k	$7s + 1$	$7s + 6 = 7(s + 1) - 1$	$7s + 4$
$5m + 1$	$35t + 1$	$35t + 6$	$35t + 11$
$5m + 4 = 5(m + 1) - 1$	$35t + 29$	$35t + 34 = 35(t + 1) - 1$	$35t + 4$
$5m + 2$	$35t + 22$	$35t + 27$	$35t + 32$

Visszatérve n -re, célszerű ennek párossági követelményét is ezen eredményekhez kapcsolni. Az $n : 2$ osztásban csak a 0 maradékot engedték meg, ezért az esetek száma nem emelkedik. Behelyettesítve a k -ra nyert kifejezéseket az $n = 2k$ összefüggésbe azt nyerjük, hogy K akkor és csak akkor osztható 840-nel, ha n -et 70-nel osztva a maradék a táblázatban szereplő maradékok valamelyikének a kétszerese, tehát a következő kilenc szám valamelyike (növekvő sorrendbe rendezve): 2, 8, 12, 22, 44, 54, 58, 64, 68.

Pl, $n = 204 = 2 \cdot 70 + 64$ -gyel $k = 102$, és így

$$K = 8(k - 1)(k + 1)(k + 3) = 8 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 105 = 840 \cdot 101 \cdot 103.$$

Mészáros Kornélia (Budapest, Veres Pálné lg. IV. o. t.)

Megjegyzés. A két osztás helyett egyre való áttérés azon a sejtésen alapul, hogy a $k : 5$ és $k : 7$ osztások r' ill. r'' maradékai egyértelműen meghatározzák a $k : 35$ osztás maradékát, más szóval, ha a különböző k_1 és k_2 számok

mindegyikének 5-ös, ill. 7-es maradéka r' , ill. r'' , akkor a $k_1 : 35$ és $k_2 : 35$ osztások egymástól csak a hányadosban különböznek. Valóban, feltevéseink szerint

$$\begin{aligned}k_1 &= 5m_1 + r' = 7s_1 + r'' \\k_2 &= 5m_2 + r' = 7s_2 + r'',\end{aligned}$$

innen

$$k_2 - k_1 = 5(m_2 - m_1) = 7(s_2 - s_1),$$

ez csak úgy állhat, ha $m_2 - m_1 = 7t$, ebből pedig $k_2 - k_1 = 35t$, ami a sejtést igazolja.