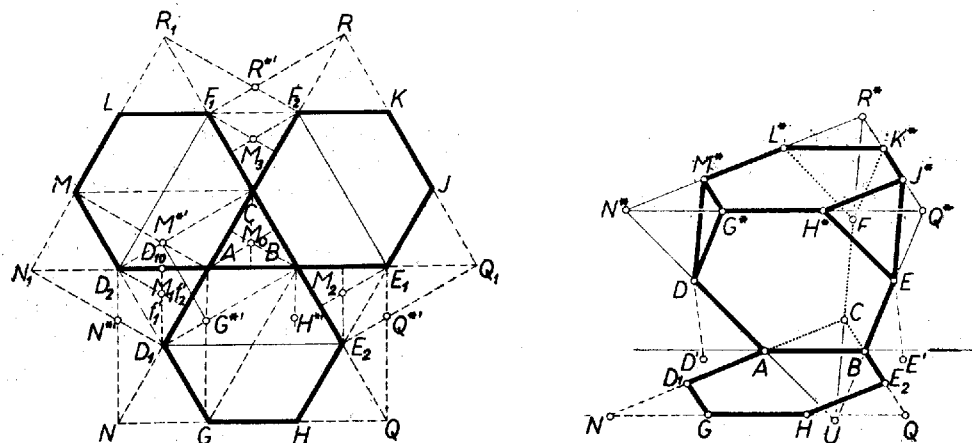


A felhajtás, más szóval (legfeljebb 180° -nyi) forgatás közben a hatszög-lapoknak bármely, nem a forgatási élbe, a t tengelybe eső P pontja olyan félkört ír le, melynek síkja merőleges a tengelyre és középpontja P forgatás előtti helyzetének a t -n levő P_0 vetülete. Minden ilyen félkörnek az ABC háromszög (helyben maradó) S síkjára való vetülete a t -re merőleges $2PP_0$ hosszúságú szakasz, felezőpontja P_0 . – A szabályos háromszög és a szabályos hatszög egy-egy szögének összege 180° , ezért a hatszögek $D_2, E_1; E_2, F_1; F_2, D_1$ csúcsai (a felhajtások előtt) az AB, BC, CA tengelyek meghosszabbításainak pontjai, továbbá az oldalak egyenlősége folytán az $AD_2D_1 = H_1, BE_2E_1 = H_2, CF_2F_1 = H_3$ háromszögek a oldalú szabályos háromszögek, és így G, D_1, D_2, M is egy egyenes pontjai.

Ezek szerint a D_1 csúc által leírt f_1 félkör vetülete a H_1 -nek D_1 -ből húzott magasságvonalára esik, és hasonlóan D_2 pályájának, f_2 -nek vetülete a D_2 -ből húzott magasságvonalra. Ezek egyetlen közös pontja H_1 -nek M_1 magasságpontja, és ez az említett szakaszoknak is pontja. Ennélfogva f_1 és f_2 -nek a feladatban szereplő D egybeesési pontja egyértelműen létezik, vetülete M_1 .

A hatszöglapok D_1E_2, D_2F_1 , átlói a forgatás minden helyzetében párhuzamosak az AB , ill. AC tengellyel (ezért S -sel is), és ugyanez áll S -en levő vetületükre. Ebből ábránk szimetriaviszonyainak figyelembevételével nyilvánvaló, hogy amikor D_1 és D_2 a D -ben egybeesnek, akkor E_2 , ill. F_1 vetülete H_2 -nek M_2 , ill. H_3 -nak M_3 magasságpontjába esik. Ugyanezért a második hatszög forgatása közben E_1 egybeesik az első és harmadik hatszög rögzítése folytán rögzített E_2 -vel, és ekkor F_2 is egybeesik a rögzített F_1 -gyel. Ezzel az állítás első részét bebizonyítottuk. A $DEF = S_1$ sík, párhuzamos S -sel, mert egymást metsző DE, DF egyenesei párhuzamosak S -sel.

A GH él az első hatszöglap bármely helyzetében párhuzamos S -sel, és – mint a forgatás előtt is – kétszer akkora távolságra van AB -től, mint D_1E_2 . Ezért G és H a lap rögzítésével abba az S -sel párhuzamos S_2 síkba jut, amely kétszer akkora távolságban van S -től, mint S_1 , S -nek ugyanazon oldalán, mint S_1 . Ugyanez áll a felhajlított J, K, L, M -re. Ezzel a kívánt bizonyítást befejeztük; ki kell még számítanunk a keletkezett P konvex test térfogatát.



Legyenek a lapok szabadon álló csúcsai a felhajlítás után $G^*, H^*, \dots, M^*$. Ekkor P -t „felülről” nyilván a $G^*H^* \dots M^*$ hatszög határolja, és további lapjai a $DG^*M^*, EH^*J^*, FK^*L^*$ háromszögek. Az AD_2D_1 , és BD_2G háromszögek hasonlósága folytán G^* -nak $G^{*'}$ vetülete a BD_2G háromszög magasságpontjába esik, és ugyanígy M^* -nak $M^{*'}$ vetülete a CMD_1 háromszög magasságpontjába. Így G^*M^* párhuzamos és egyenlő $G^{*'}M^{*'}$ -vel, ez pedig $BC(=a)$ -val, mert az utóbbi két $2a$ oldalú szabályos háromszög egybevágó és D_1D_2 oldalszakaszuk közös, így a $G^{*'}M^{*'}/CB$ négyszög paralelogramma, – továbbá $H^*G^*M^* < E_1BC < 120^\circ$. Ezek szerint $G^*H^* \dots M^*$ ugyancsak a -oldalú szabályos hatszög, P további három lapja pedig a oldalú szabályos háromszög, vagyis P -t négy a oldalú szabályos hatszög és négy a oldalú szabályos háromszög határolja, minden csúcsában két hatszög és egy háromszög síkja metszi egymást.

Ebből nyilvánvaló, hogy ha az első hatszög GH oldalának AD_1, BE_2 -vel való metszéspontját N, Q -val jelöljük, e lap helyett a $3a$ oldalú NQC háromszöget forgatjuk míg D_1 a D -be jut, és ezen lépéseink megfelelőit a másik két hatszöglapban is elvégezzük (QRA és RNB), akkor e három lap egy felül nyitott, $3a$ élű $N^*Q^*R^*U = T$ szabályos tetraédert határoz meg. A $G^*H^* \dots M^*$ -ből hasonlóan keletkező $N^*Q^*R^*$ háromszög lezárja T -t. (C az AB tengelynek a hatszöggel ellentétes partján fekszik, így a CAB kiegészítő háromszög S alá fordul, az elforduló C, A, B csúcsok S alatt esnek egybe U -ban, ennek S -en való vetülete az ABC háromszög M_0 magasságpontja.

T éleit P csúcsai 3–3 egyenlő részre osztják, ezért T -ből P -t négy egybevágó, a élű szabályos tetraéder lemettésével kapjuk (egyikük $N^*G^*M^*D$). Minthogy a b élű szabályos tetraéder térfogata $b^3\sqrt{2}/12$, azért P térfogata

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} [(3a)^3 - 4a^3] = \frac{23\sqrt{2}a^3}{12}.$$

P -nek mind a 12 csúcsa egyenértékű, minden csúcsban 3 lap: 2 hatszög és 1 háromszöglap fut össze. Eszerint bármelyik csúcsból 3 él indul ki és $2 \cdot 3$ lapbeli átló az ide befutó hatszögekben. Így a csúcsból a további 11 csúcs közül 9-hez nem testátló vezet, tehát csúcsonként 2 testátló indul ki, pl. A -ból J^* és K^* -ba. Eszerint a testátlók összes száma 12, mert a kiindulások száma $12 \cdot 2$, de minden átlón két kiindulási pont van.

Megjegyzés. Hogy $G^*M^* = a$, azt így is beláthatjuk: a hatszöglapok ϑ elfordulási szögére $\cos \vartheta = D_{10}M_1/D_{10}D_1 = 1/3$, így $AG^{*'} = AG/3$, $AM^{*'} = AM/3$, ezért az A -nál közös szögű $AG^{*'}M^{*'}$ és AGM háromszögek hasonlóak: $G^{*'}M^{*'} = GM/3 = a$.

Parti Enikő (Budapest, Bagi Ilona lg. III. o. t.)