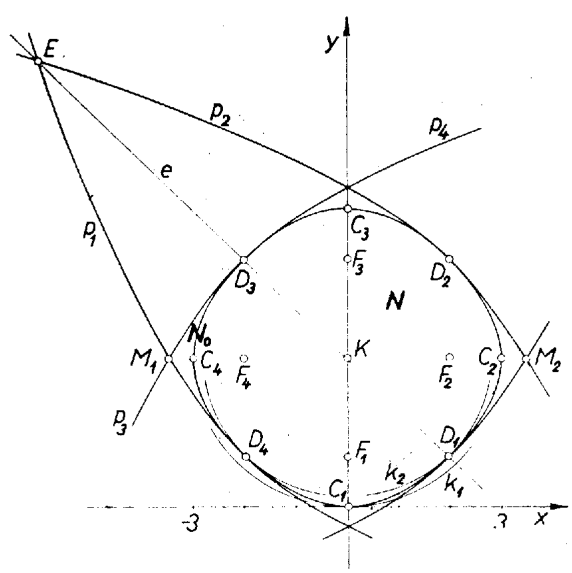
Az $\mathbf{N}$ alakzat létezik, mert a p_1 parabola C_1 csúcsa az origó, tengelye az Y-tengely, paramétere 2 egység, fókusza $F_1(0;\,1)$ így az adott K pont a p_1 belsejében van – nem magán a parabolán – ezért K a p_2, p_3, p_4-nek is a belsejében van és ugyanez áll egy a K körül elég kicsi sugárral írt kör minden pontjára, tehát a négy parabola belsejének van közös része.

Ha $\mathbf{N}$-nek egy a p_1-ből való kerületi pontjában a támaszegyenese t_1, akkor az ebből a K körüli forgatásokkal előálló t_2, t_3, t_4 egyenes ugyancsak támaszegyenes, másrészt ezek egy négyzetet zárnak körül, tehát $\mathbf{N}$ négyzetekkel burkolható.

A legnagyobb és a legkisebb támasznégyzet meghatározása céljára le kell írnunk $\mathbf{N}$-et. p_2, p_3, p_4 csúcsa rendre a $C_2(3;\,3), C_3(0;\,6), C_4(-3;\,3)$ pont, fókuszaik $F_2(2;\,3), F_3(0;\,5), F_4(-2;\,3)$, egyenleteik: $(y-3)^2+4(x-3)=0$, $x^2+4(y-6)=0$, $(y-3)^2-4(x+3)=0$. p_1 és p_3 egymást az $M_1(-\sqrt{12};\,3)$ és $M_2(\sqrt{12};\,3)$ pontokban metszik, belsejük közös része a (lencse alakú) $\mathbf{N}_0 = M_1C_1M_2C_2M_1$ görbevonalú idom, $\mathbf{N}$-et csak ebben kereshetjük. C_2 és C_4 az M_1M_2 szakaszon vannak, tehát $\mathbf{N}_0$-ban, eszerint $\mathbf{N}$ úgy keletkezik $\mathbf{N}_0$-ból, hogy p_2 és p_4-nek C_2-t, C_4-et tartalmazó bizonyos ívei $\mathbf{N}_0$-nak bizonyos részeit levágják. Szimmetria okokból, minthogy K rajta van $p_1$és így mindnégy parabola tengelyén, elég lesz meghatároznunk p_2 közös pontját p_1-nek $M_1C_1M_2$ ívével, amelyen fekvő pontok abszcisszáira $-\sqrt{12} \le x \le \sqrt{12}$.

E célra alább megmutatjuk, hogy p_2 a p_1-nek tükörképe a K-n átmenő, az Y-tengellyel $+45°$-ot bezáró e egyenesre, melynek egyenlete: $y = -x + 3$. Így p_1-nek és e-nek könnyen kiszámítható $D_1(2;\,1)$ és $E(-6;\,9)$ metszéspontjai p_2 is rajta vannak. Más közös pontja nincs is p_1 és p_2-nek, mert az egyenletükből összekapcsolt egyenletrendszer y kiküszöbölésével az $x^4 - 24x^2 + 64x - 48 = 0$ egyenletre vezet, és ennek nincs más gyöke, mint D_1 és E abszcisszája (az előbbié háromszoros gyök). – E nincs rajta az $M_1C_1M_2$ íven, D_1 viszont rajta van, ennélfogva p_2-nek az az íve, amely $\mathbf{N}_0$-nak $\mathbf{N}$-be nem tartozó részét levágja, D_1-ből indul ki. Végpontja pedig p_2 és p_3-nak a D_1-ből a K körüli $90°$-os forgatással is előálló közös pontja: $D_2(2;\,5)$, mert p_3 a p_2 ből is előáll, ha azt K körül $90°$-kal elforgatjuk. Hasonlóan p_4 a p_2-böl K körüli $180°$-os forgatással is előáll, ezért p_4 fent említett ívének végpontjai a $D_3(-2;\,5)$ és $D_4(-2;\,1)$ pontok.



p_2 valóban tükörképe p_1-nek e-re, mert a p_2-t előállító $90°$-os forgatást helyettesíthetjük két a K-n átmenő, egymással $45°$ szöget bezáró tengelyen alkalmas sorrendben való tükrözéssel.[1] Első tengelynek az Y-tengelyt véve, – mert ez p_1-et önmagába viszi át – a második tengely e lesz, – amint állítottuk. – Mindezek szerint $\mathbf{N}$-nek nemcsak forgási, hanem tengelyes szimmetriái is vannak, tengelyei a páronként egybeeső parabolatengelyek és szögfelezőik: e és a K-n át e-re merőleges egyenes. – p_1-nek D_1, beli d_1 érintője p_2-t is érinti ugyanitt, mert egyenlete $2(y+1) - 2x = 0$, azaz $y = x - 1$, iránytényezője $m = 1$, és így merőleges e-re, a tükrözéssel önmagába megy át. Eszerint $\mathbf{N}$-nek D_1-ben nincs csúcsa, támaszegyenese egyértelműen d_1, továbbá az ebből forgatással előálló d_2, d_3, d_4-et leszámítva minden támaszegyenese érintője a megfelelő parabolaívnek.

Alább megmutatjuk, hogy $\mathbf{N}$ köré és bele K-val mint középponttal kör írható, vagyis van olyan k_1 ill. k_2 kör, amelynek vannak közös pontjai $\mathbf{N}$ határvonalával, és k_1, magába foglalja $\mathbf{N}$-et, $\mathbf{N}$ magába foglalja k_2-t. k_1 a parabolák C csúcsain megy át, k_2 pedig az ívek D csatlakozási pontjain, tehát sugaruk 3, ill. $2\sqrt{2}$ egység, így k_1, k_2 minden támasznégyzetének oldala 6, ill. $4\sqrt{2}$ egység. $\mathbf{N}$-nek nem lehet nagyobb támasznégyzete, mint k_1-nek, mert k_1 minden támasznégyzete magába foglalja $\mathbf{N}$-t; 6 egységnyi oldalú támasznégyzete viszont van: az, amelyben a fenti t_1, az X-tengely, tehát $\mathbf{N}$ legnagyobb támasznégyzetének oldala 6 egységnyi. És $\mathbf{N}$-nek nem lehet kisebb támasznégyzete, mint k_2-nek, mert minden támasznégyzete magába foglalja k_2-t, $4\sqrt{2}$ oldalú támasznégyzete pedig van: az, amelyben t_1 azonos d_1-gyel, tehát $\mathbf{N}$ legkisebb támasznégyzetének oldala $4\sqrt{2}$ egységnyi.

Valóban, a p_1 parabola D_4D_1 ívének minden (x_0, y_0), azaz $(x_0, x_0^2/4)$ pontja, amelyre tehát

$$-2 \leqq x_0 \leqq 2,$$

[1] Lásd pl: KML. XVII. kötet 78. o. (1958 november).

k_1 és k_2 között, vagy egyikükön van, – és ezért ugyanez áll **N** határvonalának D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4 íveire. Ugyanis k_1, k_2 egyenlete $x^2+(y-3)^2=9$, ill. $x^2+(y-3)^2=8$, így alsó félkörívük x_0 abszcisszájú pontjának ordinátája

$$y_1 = 3-\sqrt{9-x_0^2}, \qquad \text{ill.} \qquad y_2 = 3-\sqrt{8-x_0^2},$$

így azt kell belátnunk, hogy ezekkel teljesül $y_1 \leqq y_0 \leqq y_2$, azaz

$$3-\sqrt{9-x_0^2} \leqq \frac{x_0^2}{4} \leqq 3-\sqrt{8-x_0^2}.$$

Evégett megkeressük, hogy ez a kettős egyenlőtlenség $-\sqrt{8} \leqq x_0 \leqq \sqrt{8}$ értelmezési tartományának mely x_0 számaira teljesül. Az átrendezéssel adódó

$$3-\frac{x_0^2}{4} \leqq \sqrt{9-x_0^2}, \qquad \sqrt{8-x_0^2} \leqq 3-\frac{x_0^2}{4}$$

egyenlőtlenségekben a kisebb oldal sem negatív, ezért négyzetükre ugyanazon irányú egyenlőtlenség áll:

$$-\frac{3x_0^2}{2}+\frac{x_0^4}{16} \leqq -x_0^2, \qquad -x_0^2 \leqq 1-\frac{3x_0^2}{2}+\frac{x_0^4}{16},$$

azaz

$$0 \leqq \frac{x_0^2}{2}\left(1-\frac{x_0^2}{8}\right), \qquad 0 \leqq 1-\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^4}{16} = \left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)^2,$$

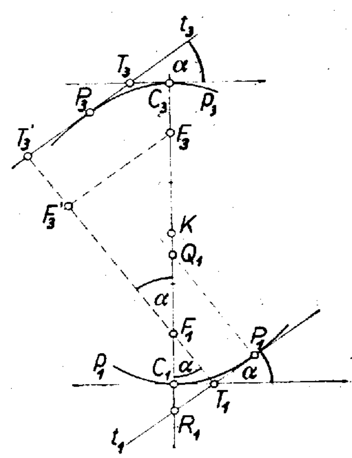
ez pedig akkor teljesül, ha

$$x_0^2 \leqq 8, \qquad -2\sqrt{2} \leqq x_0 \leqq 2\sqrt{2}, \qquad \text{ill.} \qquad x_0^2 \leqq 4, \qquad -2 \leqq x_0 \leqq 2,$$

vagyis a D_4D_1 ív minden pontjára. Egyenlőség csak az $x_0=0$, ill. az $x_0=\pm 2$ abszcisszák mellett teljesül, vagyis C_1-re, ill. D_4, D_1-re. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Kolonits Ferenc (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. **N** támaszsávjai közül a legszélesebbet, legkeskenyebbet függvényvizsgálattal is kiválaszthatjuk. Legyen t_1 és t_3 irányszöge a, erre $-45° \leqq \alpha \leqq 45°$, metszésük p_1, ill. p_3 csúcsérintőjével T_1, T_3.



A parabola érintőjének ismert tulajdonsága folytán F_1T_1 merőleges t_1-re, így a t_1, t_3 sáv z szélességét megadja T_1T_3' ahol T_3' a T_3 vetülete F_1T_1-re. Legyen még F_3 vetülete F_1T_1-re F_3', ekkor

$$z = T_1T' = T_1F_1 + F_1F_3' + F_3'T_3' =$$
$$= \frac{1}{\cos\alpha} + 4\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha} + 4\cos\alpha,$$

mert $F_1F_3 = 4$ egység. z tagjai pozitívok, szorzatuk állandó, így összegük akkor a legkisebb, ha egyenlők: $\cos^2\alpha = 1/2$, $\alpha = \pm 45°$, ebből $z_{\min} = 4\sqrt{2}$.

Másrészt $z_{\max} = 6$, mert $\alpha = 0°$-nál éppen $z = 6$, viszont a

$$z-6 = \frac{1}{\cos\alpha}(4\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 2) = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\left(2\cos\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

különbség $\cos\alpha > 0$ mellett mindaddig negatív vagy 0, amíg

$$-\frac{1}{2} \leqq 2\cos\alpha - \frac{3}{2} \leqq \frac{1}{2}, \qquad 1 \leqq 2\cos\alpha \leqq 2, \qquad -60° \leqq \alpha \leqq 60°,$$

vagyis α minden vizsgált értékére.

Arató Péter (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

2. Több dolgozat $2KP_1$-et vette a támasznégyzet oldalának, ahol P_1 a t_1 érintési pontja. p_1-en. KP_1 csak akkor merőleges t_1-re, amikor P_1 a C_1-ben vagy D_1-ben van, különben a t_1-re P_1-ben emelt merőleges egy az F_1 és K közötti Q_1 pontban metszi az Y-tengelyt, mert – mint a parabola említett tulajdonságából következik –, Q_1 annak az R_1 pontnak F_1-re való tükörképe, ahol t_1 az Y-t metszi, erre C_1R_1 a P_1 ordinátájának (-1)-szerese, ez pedig D_1-et kivéve kisebb 1-nél.