a) Egyenletünk bal oldalának nincs (valós) értelme, ha bármelyik négyzetgyök jel alatt negatív szám áll. Ez akkor és csak akkor következik be, ha akár az $x-1$, $x-2$, akár az $x-3$, $x-4$ tényezőpár ellentett előjelű, vagyis ha x akár 1 és 2 közé, akár 3 és 4 közé esik: $1<x<2$, vagy $3<x<4$. – Első egyenletünk második tagját a jobb oldalra áttéve, majd az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve

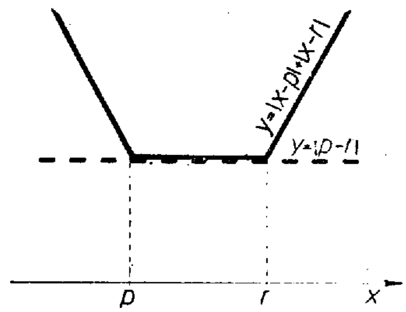
$$x^2-3x+2=2-2\sqrt{2(x-3)(x-4)}+x^2-7x+12.$$

A jobb oldalon csak a négyzetgyökös kifejezést hagyva, majd ismét négyzetre emelve és rendezve

$$\begin{gathered}2(x-3)=-\sqrt{2(x-3)(x-4)},\\ 2(x-3)^2=(x-3)(x-4),\\ (x-3)(x-2)=0.\end{gathered}$$

Innen látjuk, hogy – mivel átalakításaink során gyök nem veszhetett el – egyenletünket $x=3$- on és $x=2$-n kívül más szám nem elégítheti ki. Ezek nem kizárt értékek, és a behelyettesítés mutatja, hogy mindkettő gyöke az egyenletnek. Ezzel megkaptuk a megoldást.

b) Második egyenletünkben hosszas vizsgálatra vezetne az a kérdés, hogy p, r, q, mely értékrendszerei mellett van az egyenletnek valós értelme. Ezt az x-et tartalmazó bal oldali tagok esetére majd a szóba jövő gyökök helyén vizsgáljuk. A jobb oldali állandó számról azonban máris feltesszük, hogy valós, vagyis $(p-r)(p-r+2q)\ge 0$.



Vegyük észre, hogy $q=0$ mellett egyenletünk $|x-p|+|x-r|=|p-r|$-re egyszerűsödik, és ennek $p\ne r$ esetén minden p és r közé eső szám megoldása, beleértve p-t és r-et is (lásd az ábrát), $p=r$ esetén pedig $x=p$ az egyetlen gyök; másrészt, hogy $p=r$ esetén a bal oldal két tagja egyenlő, és a jobb oldalon 0 áll, így a gyökök $x_1=p+q$, $x_2=p-q$, hacsaknem $q=0$, amely esetet már láttunk. Feltehetjük most már, hogy $p\ne r$ és $q\ne 0$.

A fentihez hasonlóan rendezés, első négyzetreemelés és átrendezés után

$$(p-r)(x-r+q)=\sqrt{(p-r)(p-r+2q)(x-r-q)(x-r+q)},$$

újabb négyzetreemeléssel és átrendezéssel

$$\begin{gathered}(p-r)(x-r+q)^2=(p-r+2\,q)(x-r-q)(x-r+q),\\ (x-r+q)\big[(p-r)(x-r+q)-(p-r+2\,q)(x-r-q)\big]=\\ =(x-r+q)(-2\,qx+2\,pq+2\,q^2)=-2\,q(x-r+q)(x-p-q)=0.\end{gathered}$$

Eszerint gyökökként csak $x_1=r-q$ és $x_2=p+q$ jöhetnek szóba. Mindkettő kielégíti az egyenletet, mert behelyettesítve a bal oldal egyik tagja 0, másik tagja pedig egyenlő a jobb oldali (valós) számmal.

Első egyenletünk a másodiknak speciális esete $p=3/2$, $q=1/2$, $r=7/2$ értékekkel.

Hegyi László (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)