

Kifejezésünk mindkét tagja „teljes köb” (egész együttthatós racionális egész kifejezés köbe): $x^{12} = (x^4)^3$, $-3^6 y^{12} = (-3^2 y^4)^3$. Ennélfogva próbálhatunk olyan megoldást keresni, amelyben a két kéttagú kifejezés egyik-egyik tagja x^4 , ill. $-3^2 y^4$, vagyis olyan (0-tól különböző) Z és V egytagút, amellyel áll:

$$(1) \quad (x^4 + Z)^3 + (V - 3^2 y^4)^3 \equiv x^{12} - 3^6 y^{12},$$

vagyis kifejtve:

$$(1a) \quad (3x^8 Z + 3x^4 Z^2 + Z^3) + (V^3 - 3^3 V^2 y^4 + 3^5 V y^8) \equiv 0.$$

Próbálkozzunk olyan Z és V -vel, amely változóként x , y -nak csak pozitív egész kitevős hatványait tartalmazza. Ekkor az első háromtagú y -nak biztosan növekvő hatványai szerint van rendezve, és a második zárójel tagjai is vagy növekvő vagy csökkenő rendben tartalmazzák y egy-egy hatványát, mert a 2-ik, és a 3-ik tag változó része az előtte állónak egyaránt y^4/V -szerese. Így az azonossághoz szükséges, hogy a két középső tag egymásnak -1 -szerese legyen:

$$(2) \quad 3x^4 Z^2 = 3^3 V^2 y^4, \quad \text{másképpen} \quad Z^2/V^2 = 3^2 y^4/x^4.$$

Eszerint már lehetetlen, hogy a második zárójel tagjai y csökkenő hatványai szerint legyenek rendezve, mert ez a feltevés $Z^3 = -V^3$ révén $Z^3/V^3 = -1$ -re és $Z^2/V^2 = 1$ -re vezet, ezért (2) az x és y -nak csak bizonyos értékpárjaira teljesülhet, és így (1) nem állhat fenn x , y bármely értékpárjára. A másik lehetőség, a

$$(3) \quad 3x^8 Z = -V^3 \quad \text{és} \quad (4) \quad Z^3 = -3^5 V y^8$$

egyenlőségek nem vezetnek (2)-vel ellentmondásra, mert megfelelő oldalaik összeszorzásából $Z^4/V^4 = 3^4 y^8/x^8$ adódik, és ez (2)-nek következménye. Eszerint pl. (4) elhagyható.

Most már Z -nek (3)-ból vett kifejezését (2)-be téve kapjuk: $V = \pm 3x^3 y$, és így $Z = \mp 3^2 x y^3$.

Mindkét megoldás megfelel követelményeinknek, ugyanis

$$x^{12} - 3^6 y^{12} \equiv (x^4 - 3^2 x y^3)^3 + (3x^3 y - 3^2 y^4)^3 \equiv (x^4 + 3^2 x y^3)^3 + (-3x^3 y - 3^2 y^4)^3.$$

Mezey Ferenc (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t)