

Jelöljük minden előre beírt számot c -vel, minden kiszámítandót x -szel, és különböztessük meg őket úgy, hogy indexnek írjuk soruk, majd oszlopuk sorszámát; legyen továbbá az ugyanakkora összeg S . Ismeretlenek száma $2n+1$, $2n$ beírandó szám (az n -edik sorban n , az n -edik oszlopban további $n-1$, és x_{11}) és az összeg. Ugyanennyi a használható egyenleteink száma is, ugyanis bár a feladat $2n+2$ vonalon (n soron, n oszlopon és 2 átlón) írja elő az S összeget, de az n sor összege egyenlő az n oszlop összegével, azért ez a $2n$ egyenlet nem független egymástól, bármelyikük – de csak egyikük – következménye a többieknek. Valamennyi egyenletünk elsőfokú, várható tehát, hogy a felírandó rendszer megoldható, azaz ellentmondásmentes. Bizonyítási feladatunkat éppen ennek megmutatásával, a megoldás felírásával teljesítjük; innen adódik ki a válasz a további kérdésekre is.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,n-1} & x_{1n} & \longleftrightarrow & S \\
 c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2,n-1} & x_{2n} & \longleftrightarrow & S \\
 c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3,n-1} & x_{3n} & \longleftrightarrow & S \\
 . & . & . & \dots & . & . & & . \\
 c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \dots & c_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} & \longleftrightarrow & S \\
 x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{n,n-1} & x_{nn} & \longleftrightarrow & S \\
 \nearrow \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \searrow & & \\
 S & S & S & S & S & S & S &
 \end{array}$$

Táblázatunk alapján jól elképzelhetők az egyenletek anélkül, hogy formálisan felírnók őket. Figyeljük meg, hogy ha vesszük a sorokat az első és utolsó kivételével és a két átlót, ebben ugyanazok az ismeretlenek szerepelnek, mint az első és az utolsó oszlopban. Vegyük ezért a mondott $n-2$ sornak és a két átlónak az összegét és vonjuk ki belőle a két szélső oszlop összegét. Így egyrészt a keresett összeg $(n-2)+2-2=n-2$ -szeresét kapjuk, másrészt valamennyi belső szám és a két átló belső számainak összegét (vagyis az átlóbeli beírt számok 2-szer veendő és páratlan n esetén az átlók közös száma 3-szor). Az utóbbiak mindegyike ismert szám, $n-2 \neq 0$, mert $n-2 \geq 1$, tehát az állandó összeg meghatározható. Legyen a belső számok összege B , a fő- és a mellékátló belső számainak összege f és m , így

$$(1) \quad S = \frac{B + f + m}{n - 2}.$$

Most már az n -edik oszlop és az n -edik sor belső számai egyismeretlenes egyenletből számíthatók:

$$x_{in} = S - c_{i1} - s_i, \quad x_{ni} = S - c_{1i} - o_i,$$

ahol $i = 2, 3, \dots, n-1$, továbbá o_i és s_i az i -edik oszlop, ill. sor belső számainak összege. – Az n -edik oszlop belső számainak o_n összegét az egyes számok kiszámítása nélkül az előzőkhöz hasonlóan úgy kapjuk, hogy a belső sorok összegéből – ami a fentiek szerint egyenlő a belső négyzet számainak és az átlók belső számainak összegével – kivonjuk a belső négyzet valamennyi számát és az első oszlop belső számainak o_1 összegét. Így a kívánt összeg a két átló összege, kibővíve az első oszlop belső számainak összegével:

$$(2) \quad o_n = (n-2)S - B - o_1 = f + m - o_1.$$

Hasonlóan az n -edik sor belső számainak összege:

$$(3) \quad s_n = (n-2)S - B - s_1 = f + m - s_1.$$

Bármelyik sarokszámra most már úgy kapunk egyismeretlenes egyenletet, ha sorának és oszlopának összegéből kivonjuk a rajta át nem menő átló összegét, pl. x_{11} -re, majd hasonlóan x_{nn}, x_{1n}, x_{n1} -re (1) alapján

$$\begin{aligned}
 2x_{11} + s_1 + o_1 - m &= S + S - S = S, \\
 x_{11} &= \frac{1}{2}(S - s_1 - o_1 + m) = \frac{B + f + (n-1)m}{2n-4} - \frac{s_1}{2} - \frac{o_1}{2}, \\
 x_{nn} &= \frac{B - (2n-5)f - (n-3)m}{2n-4} + \frac{s_1}{2} + \frac{o_1}{2}, \\
 x_{1n} &= \frac{B + f - (n-3)m}{2n-4} - \frac{s_1}{2} + \frac{o_1}{2}, \\
 x_{n1} &= \frac{B + f - (n-3)m}{2n-4} + \frac{s_1}{2} - \frac{o_1}{2}.
 \end{aligned}$$

Hogy az így teljessé, vált megoldás valamennyi követelményt kielégíti, azt behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, a legtöbb ismeretlent tartalmazó két egyenlet (n -edik sor, n -edik oszlop) esetében ezt könnyítik a (2) és (3) összegek. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását, egyben látjuk, hogy a beírás csak egyféleképpen lehetséges.

(1) – (3) szerint S csak a belső számoktól függ, o_n , és s_n pedig csak az átlóbeli belső számoktól és a szemben fekvő oldal belső számaitól. A sarokszámok mindenestre függnék a szélső számoktól és a belső, de átlóba nem eső számoktól, ezek együttthatói ugyanis a kifejezésekben $\pm 1/2$, ill. $1/(2n-4)$. Az átlóbeli c_{ii} ill. $c_{i,n+1-i}$ számok, valamint $n = 2k-1$ esetére a két átló közös c_{kk} száma a kifejezések első tagjában többször szerepel, együttthatójuk számlálóját az alábbi összeállítás mutatja:

	x_{11} -ben :	x_{nn} -ben :	x_{1n} -ben :	x_{n1} -ben :
$c_{ii} \quad i \neq n+1-i$	$1+1=2$	$1-(2n-5)=2(3-n)$	2	2
$c_{i,n+1-i} \quad i \neq n+1-i$	n	$4-n$	$4-n$	$4-n$
$c_{kk} \quad n=2k-1$	$n+1$	$3(3-n)$	$5-n$	$5-n$

Eszerint $n \geq 6$ esetén minden sarokszám függ minden eredetileg beírt számtól, $n = 5$ esetén x_{15} és x_{51} nem függ c_{33} -tól.

$n = 3$ mellett B , f , és m egyetlen tagja c_{22} és $S = 3c_{22}$, ezért a középső sor, oszlop és az átlók egymás utáni számai számtani sorozatot alkotnak; előbbi táblázatunk első két sora itt tárgyaltan. A kérdés azonos az 530. gyakorlat¹ T_1^* táblázatának előállításával.

$n = 4$ esetén $B = f + m$, így $S = B = c_{22} + c_{23} + c_{32} + c_{33}$, másképpen: a négy belső szám is az állandó összeget adja. Ennélfogva ugyanaz áll a négy sarokszámra is, amelyek B -t a két átlónak $2S$ összegére egészítik ki, valamint ugyanazért külön-külön a szélső sorok és a szélső oszlopok $2+2=4$ belső számára. Előbbi táblázatunk második sora szerint a mellékátló két belső számától csak x_{11} függ, a mellékátló két végén álló x_{14} és x_{41} sem. Ez első hallásra meglepő, de az $S = m + f$ alakból belátható, hogy vagy mindegyikük függ tőlük, vagy egyikük sem. A táblázat így alakul:

$c_{23} + c_{32} + \frac{1}{2}(c_{22} + c_{33} - c_{12} - c_{13} - c_{21} - c_{31})$	c_{12}	c_{13}	$\frac{1}{2}(c_{22} + c_{33} + c_{21} + c_{31} - c_{12} - c_{13})$
c_{21}	c_{22}	c_{23}	$c_{32} + c_{33} - c_{21}$
c_{31}	c_{32}	c_{33}	$c_{22} + c_{23} - c_{31}$
$\frac{1}{2}(c_{22} + c_{33} + c_{12} + c_{13} - c_{21} - c_{31})$	$c_{23} + c_{33} - c_{12}$	$c_{22} + c_{32} - c_{13}$	$\frac{1}{2}(c_{12} + c_{13} + c_{21} + c_{31} - c_{22} - c_{33})$

Parti Enikő (Budapest, Bagi Ilona lg. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. S kiszámítására vezető megfontolásunkat $n = 5$ és $n = 6$ esetére úgy szemléltetjük, hogy a kifejezés tagjai helyére „+”, ill. „-” jelet írunk aszerint, hogy a kérdéses tagot felvettük, ill. kivontuk. Csupa olyan tagot vontunk csak ki, amelyet előzőleg felvettünk, ezért „-” jel magában nem áll, csak „+” jelle ráírva, ami együtt „+”-nak látszik, ez azonban végeredményben a kifejezésből való hiányzást jelöli (1. és 2. ábra). Hasonlóan szemlélteti az o_n összeg meghatározását a 3. ábra, x_{11} -ét a 4. ábra, mindkettő $n = 5$ -re.

$$[(5-2)+2-2]S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & & & & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & & & & + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & + \\ \hline + & + & + \\ \hline + & + & + \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & & & & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & & & & + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & & & & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & & & & + \\ \hline \end{array}$$

1. ábra

2. ábra

$$o_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline - & - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - & - \\ \hline - & - & - & - & - \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline \end{array}$$

3. ábra

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & & & & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & & & & + \\ \hline \end{array} = (2-1)S, \quad 2x_{11} + s_1 + o_1 - m = S, \quad (2-2)S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & & & & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & & & & + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & & & & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & + & + & + & + \\ \hline + & & & & + \\ \hline \end{array} = 0$$

4. ábra

5. ábra

2. A (2) és (3) összefüggésekből átalakítással és egybekapcsolással tetszetős összefüggés adódik:

$$o_1 + o_n = f + m = s_1 + S_n.$$

¹ Lásd XIX. kötet 123. o. (1959. november)

Ennek első részéhez (0-ra redukált alakban) egyszerűbben vezet el az 5. ábrán szemléltetett elgondolás.

3. $n = 2$ -vel nem volna előzetesen beírt szám, nem is létezik másodrendű „bűvös négyzet”. $n = 1$ esetén viszont – bár elfajult értelemben, ti. egytagú összegekkel – van megoldás: bármely szám tekinthető elsőrendű bűvös négyzetnek.

4. Több dolgozat „tetszés szerinti szám”-on a hétköznapi szóhasználatot követve – csak egész, sőt továbbmenve csak természetes számot értett – és azt is vizsgálta, mely feltételek mellett lesznek S és az x -ek egész, ill. pozitív számok.