

Írjuk fel az 555. gyakorlatban ¹ bebizonyított

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

kettős egyenlőtlenséget az $n = 17161, 17162, \dots, 1\,000\,000$ számokra:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2\sqrt{17162} & - & 2\sqrt{17161} & < & 1/\sqrt{17161} & < & 2\sqrt{17161} & - & 2\sqrt{17160} \\ 2\sqrt{17163} & - & 2\sqrt{17162} & < & 1/\sqrt{17162} & < & 2\sqrt{17162} & - & 2\sqrt{17161} \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 2\sqrt{1\,000\,000} - 2\sqrt{999\,999} & < & 1/\sqrt{999\,999} & < & 2\sqrt{999\,999} & - & 2\sqrt{999\,998} \\ 2\sqrt{1\,000\,001} - 2\sqrt{1\,000\,000} & < & 1/\sqrt{1\,000\,000} & < & 2\sqrt{1\,000\,000} - 2\sqrt{999\,999} \end{array}$$

Mindezeket összeadva „középen” a szóban forgó S összeg adódik, balról, ill. jobbról pedig csak két-két tagot kapunk, mert a 17162-től 1 000 000-ig, ill. 17161-től 999 999-ig terjedő természetes számok négyzetgyökének 2-szerese kétszer-kétszer lép fel, ellentett jellel, így kiesik:

$$2\sqrt{1\,000\,001} - 2\sqrt{17161} < S < 2\sqrt{1\,000\,000} - 2\sqrt{17160}.$$

Itt két négyzetgyök egész eredményre vezet: 131, ill. 1 000, a másik kettőről pedig elég ennyit tudnunk: $\sqrt{17160} > 130,5$, ill. $\sqrt{1\,000\,001} > 1\,000$ (amit négyzetre emeléssel ellenőrizhetünk), helyettük ezeket a számokat írva a jobb oldalt nagyobb számmal pótoljuk, a bal oldalt pedig kisebbel, tehát az egyenlőtlenségek „erősebbekké válnak”:

$$2 \cdot 1000 - 2 \cdot 131 < S < 2 \cdot 1000 - 2 \cdot 130,5$$

azaz

$$1738 < S < 1739.$$

Ezzel a kérdéses összeget bezártuk két szomszédos természetes szám közé.

Budai Zsuzsanna (Budapest, Lorántffy Zs. uti lg. III. o. t.)

¹Lásd a megoldást KML XIX. kötet 135. o. 1959. november.